Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. C. Kaiser

SS 2007

13. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis II

Keine Abgabe!

Aufgabe 13.1

a) Es sei $r > 0$. Berechnen Sie das Volumen des Durchschnitts A der beiden Kreiszylinder im R^3, die durch die Ungleichungen $x^2+z^2 \leq r^2$ und $y^2+z^2 \leq r^2$ beschrieben werden.

b) Im $\mathbb{R}^3$ sei die Menge A durch die Fläche $z = x^2 - y^2 \geq 0$, die x, y-Ebene und durch die Ebenen $x = 0$ und $x = 3$ begrenzt. Berechnen Sie das Volumen von A.

Aufgabe 13.2

a) Gibt es eine Folge (f_k) in $L([0,1])$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{[0,1]} |f_k(x)|dx = 0$, welche nicht fast überall in $[0,1]$ gegen 0 konvergiert?

b) Gibt es eine Folge (f_k) in $L([0,1])$, die fast überall in $[0,1]$ gegen 0 konvergiert, für die jedoch die Folge $\left(\int_{[0,1]} |f_k(x)|dx\right)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert?

c) Gibt es eine Folge (f_k) in $L([0,1])$, die gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen 0 konvergiert, für die jedoch die Folge $\left(\int_{[0,1]} |f_k(x)|dx\right)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert?

d) Gibt es eine Folge (f_k) in $L(\mathbb{R})$, die gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert, für die jedoch die Folge $\left(\|f_k\|_1\right)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert?

Aufgabe 13.3

Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, so gilt

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} f(x+n) = 0 \qquad \text{fast überall in } \mathbb{R}.$$

Aufgabe 13.4 (Lemma von Fatou)

Sei (f_k) eine Folge nichtnegativer Funktionen in $L(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft

$$\sup\{\|f_k\|_1 : k \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Beweisen Sie:

a) Die Funktion

$$g(x) := \sup\{\inf\{f_k(x) : k \geq m\} : m \in \mathbb{N}\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ist Lebesgue-integrierbar.

b) $\|g\|_1 \leq \liminf\limits_{k\to\infty} \|f_k\|_1$.

Aufgabe 13.5

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \left(2x(f(x) - f(\tfrac{x}{2}))\right)^k dx.$$

b) Seien $(a_k)_{k\geq 0},\ (b_k)_{k\geq 0}$ Folgen in $\mathbb{R}$, deren Reihen absolut konvergieren. Sei weiter
$$f : [0,\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)).$$
Zeigen Sie, dass $f \in L([0,\pi])$ ist, und berechnen Sie $\displaystyle\int_{[0,\pi]} f(x)\, dx$.

Aufgabe 13.6

Berechnen Sie die Integrale

a) $\displaystyle\int_A 2z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z), \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\};$

b) $\displaystyle\int_B 2(z-4)y^2\, d(x,y,z),\ B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 8z,\ x^2+y^2 \leq 9,\ z \leq 2\};$

c) $\displaystyle\int_C x^2yz\, d(x,y,z), \quad C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x,\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\};$

d) $\displaystyle\int_D y^2\, d(x,y,z), \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq y^2+z^2 \leq |x|\}.$

Aufgabe 13.7

U sei die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie: Ist $f \in L(U)$ und A eine orthogonale (3×3)-Matrix ($A^T = A^{-1}$), so gilt
$$\int_U f(x)\, dx = \int_U f(Ax)\, dx.$$

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_U (x_1+x_2+x_3)^2\, dx.$

Aufgabe 13.8

a) Berechnen Sie für den Kreiskegel
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1-z,\ 0 \leq z \leq 1\}$$
das Integral
$$\int_A (x^2+y^2)^2 e^{(1-z)^7}\, d(x,y,z).$$

b) Für die Kugelschale $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : b^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq B^2\}$ $(0 < b < B)$ bestimme man
$$I_\alpha(b,B) = \int_D (x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}\, d(x,y,z), \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$
Für welche α existiert $\displaystyle\lim_{B\to\infty} I_\alpha(1,B)$ bzw. $\displaystyle\lim_{b\to 0+} I_\alpha(b,1)$, und wie groß sind die Grenzwerte?