Analysis II
SS 2007, Gerd Herzog

1 Normierte lineare Räume, Konvergenz

Mit V, W, X, Y, Z bezeichnen wir stets reelle Vektorräume (VR) (d.h. Vektorräume mit Skalarkörper $\mathbb{R}$). Ist V endlichdimensional so schreiben wir auch V_n mit $\dim V_n = n$.

Bsp.: 1.) $\mathbb{R}^n = \{x : x$ ist Abbildung von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\mathbb{R}\}$. Schreibweise (je nach Bedarf): $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (Zeilenvektor) oder $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ (Spaltenvektor). Hierbei ist stets $n \in \mathbb{N}$.

2.) $\mathcal{L}(V, W)$ bezeichnet den VR aller linearen Abbildungen $\Phi : V \to W$. Aus LA bekannt: $\mathcal{L}(V_n, V_m)$ kann identifiziert werden mit dem VR $\mathbb{R}^{m \times n}$ aller $m \times n$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es gilt $\dim \mathcal{L}(V_n, W_m) = mn$.

3.) $\mathbb{R}[t]$ bez. den VR aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Es gilt $\dim \mathbb{R}[t] = \infty$. $B = \{t^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[t]$: Offensichtlich ist $[B] = \mathbb{R}[t]$, und B ist linear unabh., denn aus $\sum_{k=0}^n \xi_k t^k = 0$ folgt $\xi_0 = 0$ und (durch wiederholtes differenzieren) $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$.

4.) Sei $a < b$, $n \in \mathbb{N}$. $C([a, b], \mathbb{R})$, $C^n([a, b], \mathbb{R})$, $R([a, b], \mathbb{R})$ und $BV([a, b], \mathbb{R})$ sind unendlichdim. VRe.

Definition 1 *Eine Abbildung* $||.|| : V \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften*

1.) $||x|| \geq 0$ $(x \in V)$ *und* $||x|| = 0 \iff x = 0$

2.) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ $(x \in V, \lambda \in \mathbb{R})$ *(Homogenität)*

3.) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ $(x, y \in V)$ *(Dreiecksungleichung)*

heißt eine Norm auf V*. Ist* $||.||$ *eine Norm auf* V*, so heißt* $(V, ||.||)$ *ein normierter linearer Raum (NLR). Für* $x, y \in V$ *heißt* $||x - y||$ *der Abstand von* x *und* y *(bzgl.* $||.||$*).*

Bsp.: 1.) $V = \mathbb{R}$, $||x|| = |x|$.

2.) $V = \mathbb{R}^n$. Folgende Abbildungen sind Normen auf $\mathbb{R}^n$:

a) $||x|| = \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}$ (Maximumsnorm)

b) $||x|| = \sum_{k=1}^n |\xi_k|$ (Betragssummennorm)

c) $||x|| = (\sum_{k=1}^n \xi_k^2)^{1/2}$ (Euklidnorm)

a),b) Übung, c) vgl. Satz 1.

3.) $V = C([a, b], \mathbb{R})$. Folgende Abbildungen sind Normen auf $C([a, b], \mathbb{R})$:

a) $||f|| = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$

b) $||f|| = \int_a^b |f(t)| dt$

a),b) Übung.

Genau wie in Ana I für den Betrag beweist man für Normen:

1.) $|\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x - y||$ $(x, y \in V)$ und

2.) $||\sum_{k=1}^n x_k|| \leq \sum_{k=1}^n ||x_k||$ $(x_1, \ldots, x_n \in V)$.

Definition 2 *Es seien* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$.

$x \cdot y := xy := \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n$ *heißt Innenprodukt (oder Skalarprodukt) von* x *und* y.

Es gilt: $\sqrt{x \cdot x} = (\sum_{k=1}^n \xi_k^2)^{1/2}$ (Euklidnorm).

Satz 1 *Sei* $||x|| = (\sum_{k=1}^n \xi_k^2)^{1/2}$ *(*$x \in \mathbb{R}^n$*). Für* $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

1.) $||x|| \geq 0$ *und* $||x|| = 0 \iff x = 0$

2.) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$

3.) $|xy| \leq ||x|| \; ||y||$ *(CSU)*

4.) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Beweis: 1.),2.) trivial. 3.) ist offensichtlich für $y = 0$. Sei $y \neq 0$ (also nicht alle Koordinaten von $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ sind $= 0$). Setze $\lambda = (xy)/||y||^2$. Es gilt:

$0 \leq \sum_{k=1}^n (\xi_k - \lambda\eta_k)^2 =$
$\sum_{k=1}^n (\xi_k^2 - 2\lambda\xi_k\eta_k + \lambda^2\eta_k^2) =$
$||x||^2 - 2\lambda(xy) + \lambda^2||y||^2 =$
$||x||^2 - 2(xy)^2/||y||^2 + (xy)^2/||y||^2 =$
$||x||^2 - (xy)^2/||y||^2 \Rightarrow$
$(xy)^2 \leq ||x||^2||y||^2 \Rightarrow$ Beh.

4.) $||x + y||^2 = (x + y)(x + y) = xx + 2xy + yy \leq$
$||x||^2 + 2|xy| + ||y||^2 \leq$
$||x||^2 + 2||x|| \; ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2 \Rightarrow$ Beh. ■

Ist $||.||_0$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und V_n ein n-dimensionaler VR, so kann V_n folgendermaßen normiert werden. Wähle eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$, und für $x = \sum_{k=1}^n \xi_k b_k$ sei

$$||x|| := ||(\xi_1, \ldots, \xi_n)||_0.$$

Dann ist $||.||$ eine Norm auf V_n. Ist umgekehrt $||.||_0$ eine Norm auf V_n, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V_n, und setzt man

$$||(\xi_1, \ldots, \xi_n)|| := ||\sum_{k=1}^n \xi_k b_k||_0,$$

so ist $||.||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. (Übung).

Bsp.: Betr. $V_3 = \{p \in \mathbb{R}[t] : \operatorname{grad} p \leq 2\}$. $\{1, t, t^2\}$ ist eine Basis von V_3. V_3 enthält also genau die Polynome der Form $p(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$. Setzt man z.B. $||p|| = \max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\}$, so ist $||.||$ eine Norm auf V_3.

Definition 3 *Sei $(V, ||.||)$ ein NLR.*
1.) Eine Menge $A \subseteq V$ heißt beschränkt falls gilt:

$$\exists c \geq 0 \; \forall x \in A : \; ||x|| \leq c.$$

2.) Eine Folge (x_n) in V heißt konvergent falls gilt: Es existiert ein $x \in V$ mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \; ||x_n - x|| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt x der GW der Folge (x_n). Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *oder* $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.
3.) Eine Folge (x_n) in V heißt CF falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 : \; ||x_n - x_m|| < \varepsilon.$$

Für Folgen in NLR sind die Begriff Divergenz, Beschränktheit und Teilfolge wie für Folgen in $\mathbb{R}$ definiert. Wie in Ana I zeigt man:

Konvergente Folgen sind beschränkt; der GW einer konv. Folge ist eindeutig bestimmt; $x_n \to x \iff ||x_n - x|| \to 0$; aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ folgt $x_n + y_n \to x + y$, $\lambda x_n \to \lambda x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $||x_n|| \to ||x||$; jede TF einer konvergenten Folge konvergiert gegen denselben GW.

Ebenfalls wie in Ana I zeigt man: Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) eine CF. Die Umkehrung ist in NLRen i.a. falsch aber für endlichdimensionale NLRe immer richtig (Beweis später), d.h. diese sind im Sinne folgender Definition vollständig.

Definition 4 *Ein NLR $(V, ||.||)$ heißt vollständig (oder auch Banachraum) falls gilt: Jede CF ist konvergent.*

Die Begriffe in Definition 3 und 4 hängen i.a. von der gewählten Norm ab.

Bsp.: Betr. $V = C([0,1], \mathbb{R})$, $||f||_1 = \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\}$, $||f||_2 = \int_0^1 |f(t)|dt$ und die Folge (f_n) in V mit $f_n(t) = t^n$. Es gilt $||f_n||_2 = 1/(n+1) \to 0$ $(n \to \infty)$, also $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ bzgl. $||.||_2$. Aber (f_n) ist divergent bzgl. $||.||_1$, denn Konvergenz bzgl. $||.||_1$ bedeutet glm. Konv. auf $[0,1]$ aber (t^n) konv. nicht glm. auf $[0,1]$.

Dies führt auf die Frage welche Normen auf einem VR (unter den Aspekten Konvergenz von Folgen, Beschränktheit von Mengen, und später, Stetigkeit von Funktionen etc.) als gleichwertig zu betrachten sind.

Definition 5 *Für zwei Normen $||.||_1, ||.||_2$ auf V schreiben wir $||.||_1 \sim ||.||_2$ falls gilt: Es existieren $\alpha, \beta > 0$ mit*

$$\alpha||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \beta||x||_1 \quad (x \in V).$$

Satz 2 *"$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf V*

Beweis: 1.) $||.|| \sim ||.||$ gilt für jede Norm $||.||$ auf V.
2.) Aus $||.||_1 \sim ||.||_2$ folgt

$$\frac{1}{\beta}||.||_2 \leq ||.||_1 \leq \frac{1}{\alpha}||.||_2.$$

Somit ist $||.||_2 \sim ||.||_1$.
3.) Sei $||.||_1 \sim ||.||_2$ und $||.||_2 \sim ||.||_3$. Es existieren also $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ mit

$$\alpha||.||_1 \leq ||.||_2 \leq \beta||.||_1, \quad \gamma||.||_2 \leq ||.||_3 \leq \delta||.||_2.$$

Damit gilt

$$\gamma\alpha||.||_1 \leq ||.||_3 \leq \delta\beta||.||_1$$

also $||.||_1 \sim ||.||_3$. ∎

Es sei $||.||_1 \sim ||.||_2$. Für eine Menge $A \subseteq V$ gilt in diesem Fall offensichtlich:

A ist beschränkt bzgl. $||.||_1 \iff A$ ist beschränkt bzgl. $||.||_2$.

Ebenso gilt für Folgen (x_n) in V in diesem Fall:

(x_n) konv. bzgl. $||.||_1 \iff (x_n)$ konv. bzgl. $||.||_2$, sowie

(x_n) ist CF $||.||_1 \iff (x_n)$ ist CF $||.||_2$.

Bem.: In obigem Bsp. sind die angegebenen Normen $||.||_1$ und $||.||_2$ also nicht äquivalent. Es gilt aber:

Satz 3 *Sind* $||.||_1, ||.||_2$ *Normen auf einem* n*-dim. VR* V_n *so ist* $||.||_1 \sim ||.||_2$

Beweis: Wir wählen eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V_n. Wegen Satz 2 kann O.B.d.A. $||.||_1$ speziell gewählt werden. Es sei $||.||_1$ die Norm auf V_n mit

$$||x||_1 = ||\sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k||_1 := \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}.$$

Es gilt:

$$||x||_2 = ||\sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k||_2 \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \; ||b_k||_2 \leq ||x||_1 \sum_{k=1}^{n} ||b_k||_2.$$

Setze $\beta = \sum_{k=1}^{n} ||b_k||_2$.

Die andere Ungl. beweisen wir indirekt: Ang. es gibt kein $\alpha > 0$ mit der gew. Eigenschaft. Dann ex. zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein

$$x_N = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(N)} b_k \text{ mit } 0 \leq ||x_N||_2 < \frac{1}{N}||x_N||_1.$$

Insbes. ist dann $x_N \neq 0$, also $||x_N||_2 > 0$ $(N \in \mathbb{N})$. Setze

$$y_N := \frac{x_N}{||x_N||_1} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k^{(N)} b_k \quad (N \in \mathbb{N}),$$

mit $\eta_k^{(N)} = \xi_k^{(N)}/||x_N||_1$, $(k = 1, \ldots, n)$. Es gilt $||y_N||_2 < 1/N$, und es gilt $||y_N||_1 = 1$ $(N \in \mathbb{N})$. Daher ex. zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $k(N) \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|\eta_{k(N)}^{(N)}| = 1$. Somit ex. ein $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|\eta_{k_0}^{(N)}| = 1$ für unendlich viele $N \in \mathbb{N}$, etwa für $N_1 < N_2 < N_3 < \ldots$. Die Folgen $(\eta_k^{(N_j)})_j$ $(k = 1, \ldots, n)$ sind beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Mit dem Satz von Bolzano Weierstraß in $\mathbb{R}$ und durch sukzessive Wahl von TFen erhählt man eine TF (N_{j_l}) von (N_j), so daß die Folgen $(\eta_k^{(N_{j_l})})_l$ $(k = 1, \ldots, n)$ alle konvergieren. Die jeweiligen GWe seien $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Es gilt $|\eta_{k_0}| = 1$. Damit ist $y := \sum_{k=1}^{n} \eta_k b_k \neq 0$. Weiter gilt:
$||y||_2 \leq ||y - y_{N_{j_l}}||_2 + ||y_{N_{j_l}}||_2 \leq \beta ||y - y_{N_{j_l}}||_1 + 1/N_{j_l}$.
Die rechte Seite dieser Ungl. geht gegen 0 $(l \to \infty)$, damit folgt $||y||_2 = 0$ im Widerspruch zu $y \neq 0$. ■

Bsp.: Betr. $V_n = \mathbb{R}^n$. Sei $||x||_1 := \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}$ und $||x||_2 := \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|$. Es gilt: $||x||_1 \leq ||x||_2$ und $||x||_2 \leq n||x||_1$, also $||x||_2/n \leq ||x||_1 \leq ||x||_2 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$.

Satz 4 *Es sei $(V_n, ||.||)$ ein n-dim. NLR. Dann gilt:*

1.) Ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V_n und

$$(x_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(k)} b_j \right)$$

eine Folge in V_n, so gilt: (x_k) ist konvergent $\iff$ die Folgen $(\xi_j^{(k)})_k$ $(j = 1, \ldots, n)$ sind konvergent. In diesem Fall gilt

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \sum_{j=1}^{n} (\lim_{k \to \infty} \xi_j^{(k)}) b_j.$$

2.) $(V_n, ||.||)$ ist vollständig.

Bem.: Aus Satz 4 folgt für $V_n = \mathbb{R}^n$ ($||.||$ bel. Norm): Eine Folge $(x_k) = ((\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}))$ in $\mathbb{R}^n$ konv. genau dann, wenn alle Koordinatenfolgen $(\xi_1^{(k)}), \ldots, (\xi_n^{(k)})$ konvergieren. In diesem Fall ist

$$\lim_{k\to\infty} x_k = (\lim_{k\to\infty} \xi_1^{(k)}, \ldots, \lim_{k\to\infty} \xi_n^{(k)}).$$

D.h. Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ ist gleichbedeutend mit koordinatenweiser Konvergenz.

Bsp.: $((1/n, 1/n^2, 1+1/n))$ ist eine Folge in $\mathbb{R}^3$. Es gilt: $\lim_{n\to\infty}(1/n, 1/n^2, 1+1/n) = (0,0,1)$. Die Folge $((1/n, (-1)^n))$ in $\mathbb{R}^2$ ist divergent, da $((-1)^n)$ divergiert.

Beweis: 1.) Wegen Satz 3 kann $||.||$ O.B.d.A. speziell gewählt werden. Für $x = \sum_{j=1}^n \xi_j b_j$ wählen wir $||x|| = \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}$. Nun sei $(x_k) = (\sum_{j=1}^n \xi_j^{(k)} b_j)$ eine Folge in V_n.

Es sei (x_k) konv. mit GW $x = \sum_{j=1}^n \xi_j b_j$. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 :\ \max\{|\xi_1^{(k)} - \xi_1|, \ldots, |\xi_n^{(k)} - \xi_n|\} < \varepsilon.$$

Somit gilt:

$$\forall k \geq k_0\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} :\ |\xi_j^{(k)} - \xi_j| < \varepsilon.$$

Damit sind alle Folgen $(\xi_j^{(k)})_k$ konvergent $(j = 1, \ldots, n)$, die jeweiligen GWe sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Seien umgekehrt die Folgen $(\xi_j^{(k)})_k$ konvergent $(j = 1, \ldots, n)$, die jeweiligen GWe seien $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Setze $x := \sum_{j=1}^n \xi_j b_j$. Es sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ existiert dann ein k_j mit:

$$\forall k \geq k_j : |\xi_j^{(k)} - \xi_j| < \varepsilon.$$

Setze $k_0 := \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Für $k \geq k_0$ gilt dann

$$||x_k - x|| = \max\{|\xi_1^{(k)} - \xi_1|, \ldots, |\xi_n^{(k)} - \xi_n|\} < \varepsilon.$$

Somit konv. (x_k) gegen x.

2.) Wir wählen eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V_n. Wegen Satz 3 kann $||.||$ O.B.d.A. speziell gewählt werden. Für $x = \sum_{j=1}^n \xi_j b_j$ wählen wir $||x|| = \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}$. Nun sei $(x_k) = (\sum_{j=1}^n \xi_j^{(k)} b_j)$ eine CF in V_n. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k, l \geq k_0 :\ ||x_k - x_l|| < \varepsilon.$$

Für $k, l \geq k_0$ gilt somit

$$|\xi_j^{(k)} - \xi_j^{(l)}| < \varepsilon, \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Damit sind die Folgen $(\xi_j^{(k)})_k$ $(j = 1, \ldots, n)$ CF in $\mathbb{R}$, somit konvergent. Aus Teil 1) folgt die Beh. ■

Satz 5 *(Bolzano Weierstraß) Es sei* $(V_n, ||.||)$ *ein endlichdim. NLR und* (x_k) *eine beschränkte Folge in* V_n*. Dann besitzt* (x_k) *eine konvergente TF.*

Beweis: Wähle eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V_n. Wegen Satz 3 kann $||.||$ O.B.d.A. speziell gewählt werden. Für $x = \sum_{j=1}^n \xi_j b_j$ wählen wir $||x|| = \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}$. Da $(x_k) = (\sum_{j=1}^n \xi_j^{(k)} b_j)$ beschränkt ist ex. ein $c \geq 0$ mit

$$||x_k|| = \max\{|\xi_1^{(k)}|, \ldots, |\xi_n^{(k)}|\} \leq c \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Damit sind alle Folgen $(\xi_j^{(k)})_k$ $(j = 1, \ldots, n)$ beschränkt. Mit dem Satz von Bolzano Weierstraß in $\mathbb{R}$ und durch sukzessive Wahl von TFen erhählt man eine TF (k_l) von (k), so daß alle Folgen $(\xi_j^{(k_l)})_l$ $(j = 1, \ldots, n)$ konvergieren. Nach Satz 4 konvergiert dann die Folge (x_{k_l}). ■

Nun seien $(V_n, ||.||_1)$, $(W, ||.||_2)$ NLRe. Der VR $\mathcal{L}\,(V_n, W)$ kann u.a. folgendermaßen normiert werden:

Satz 6 *Es sei* $\Phi \in \mathcal{L}\,(V_n, W)$*. Dann gilt: Die Menge*

$$M := \left\{ \frac{||\Phi(x)||_2}{||x||_1} : x \in V_n \setminus \{0\} \right\}$$

ist beschränkt und $|||.||| : \mathcal{L}(V_n, W) \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$|||\Phi||| = \sup_{x \neq 0} \frac{||\Phi(x)||_2}{||x||_1} \ (= \sup M)$$

ist eine Norm auf $\mathcal{L}(V_n, W)$. *Für diese Norm gilt:*

$$||\Phi(x)||_2 \leq |||\Phi||| \ ||x||_1 \quad (x \in V_n).$$

Beweis: Wir wählen eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V_n. Nach Satz 3 sei wieder o.B.d.A. $||.||_1$ die Maximumsnorm der Koeffiziententupel bzgl. der gew. Basis in V_n. Für $x = \sum_{j=1}^n \xi_j b_j$ gilt:

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^n \xi_j \Phi(b_j),$$

also

$$||\Phi(x)||_2 \leq \sum_{j=1}^n |\xi_j| \ ||\Phi(b_j)||_2 \leq ||x||_1 \sum_{j=1}^n ||\Phi(b_j)||_2.$$

Somit ist M beschränkt durch

$$\sum_{j=1}^n ||\Phi(b_j)||_2.$$

Rest: Übung. ■

Bem.: Ist $||.||_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $||.||_2$ ein Norm auf $\mathbb{R}^m$ so ist also insbesondere durch

$$|||A||| := \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_1}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ erklärt, und es gilt: $||Ax||_2 \leq |||A||| \ ||x||_1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Übung: Ist $V_n = W$ und $||.||_1 = ||.||_2$ so gilt für $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(V_n, V_n)$: $|||\Phi \circ \Psi||| \leq |||\Phi||| \ |||\Psi|||$. Diese Eigenschaft der Norm heißt Submultiplikativität.

2 Topologische Grundbegriffe

Im folgenden sei $(V, ||.||)$ ein NLR. Für $x_0 \in V$, $\delta > 0$ heißt $U_\delta(x_0) := \{x \in V : ||x - x_0|| < \delta\}$ δ-Umgebung von x_0, oder offene Kugel um x_0 mit Radius δ.

Bsp: $V = \mathbb{R}^2$, $||(x,y)||_1 = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $||(x,y)||_2 = |x| + |y|$, $||(x,y)||_3 = \max\{|x|, |y|\}$.

Es gilt (Übung): $A \subseteq V$ ist beschränkt $\iff \exists c > 0 : A \subseteq U_c(0)$ $\iff \exists x_0 \in V \; \exists c > 0 : A \subseteq U_c(x_0)$.

Definition 6 *Sei $A \subseteq V$.*

1.) x_0 heißt innerer Punkt von $A :\iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A$.

2.) $A^\circ := \{x \in A : \; x$ ist innerer Punkt von $A\}$ heißt Inneres von A.

3.) A heißt offen $:\iff \; A = A^\circ$ (bea.: $A^\circ \subseteq A$ gilt immer).

Satz 7 *1.) Die Vereinigung bel. vieler offener Mengen ist offen.*

2.) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Bem.: Der Schnitt unendl. vieler offener Mengen ist i.a. nicht offen. Bsp.: $V = \mathbb{R}$, $\bigcap_{t>0}(0, 1+t) = (0, 1]$.

Beweis: 1.) Seien A_j $(j \in J)$ offene Mengen. Sei $x_0 \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Dann ex. $j_0 \in J : x_0 \in A_{j_0} \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j.$$

2.) Es seien $A_1, \dots, A_n$ offen und $x_0 \in \bigcap_{j=1}^n A_j$. Dann gilt $x_0 \in A_j$ $(j = 1, \dots, n) \Rightarrow$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \exists \delta_j > 0 : U_{\delta_j}(x_0) \subseteq A_j.$$

Sei $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Es gilt $\delta > 0$ und $U_\delta(x_0) \subseteq \bigcap_{j=1}^n A_j$. ■

Definition 7 *Sei $A \subseteq V$.*

1.) $x_0 \in V$ heißt Häufungspunkt (HP) von $A :\Longleftrightarrow$

$$\forall \delta > 0 : \ (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset.$$

2.) $H(A) := \{x \in V : \ x \text{ ist HP von } A\}$.

3.) $\overline{A} := A \cup H(A)$ heißt Abschluß von A.

4.) A heißt abgeschlossen $: \Longleftrightarrow \quad A = \overline{A}$ (bea.: $A \subseteq \overline{A}$ gilt immer).

Satz 8 *Sei $A \subseteq V$, Es gilt:*

1.) A ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ $V \setminus A$ ist offen.

2.) Die Vereinigung endlich vieler abg. Mengen ist abg.

3.) Der Durchschnitt bel. vieler abg. Mengen ist abg.

4.) A ist abg. $\Longleftrightarrow$ $H(A) \subseteq A$.

Beweis: 1.) Sei A abg. Ang.: $V \setminus A$ ist nicht offen. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in V \setminus A \ \forall \delta > 0 : \ U_\delta(x_0) \not\subseteq V \setminus A \ \Rightarrow$$

$$\forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in U_\delta(x_0) \cap A.$$

Wegen $x_0 \notin A$ gilt also für jedes $\delta > 0$:

$$x_\delta \in (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A.$$

Somit gilt $x_0 \in H(A) \subseteq \overline{A} = A$. W!

Sei umgekehrt $V \setminus A$ offen. Ang.: A ist nicht abg., also $A \neq A \cup H(A)$. Dann ex. $x_0 \in H(A)$ mit $x_0 \in V \setminus A$ und somit ex. $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq V \setminus A$. Also gilt: $(U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow x_0 \notin H(A)$. W!

2.),3.) folgen aus Satz 7 und 1.).

4.) $\Rightarrow$ klar. Umgek. folgt aus $H(A) \subseteq A$:

$$\overline{A} = A \cup H(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}.$$

■

Definition 8 *Sei $A \subseteq V$.*

1.) $x_0 \in V$ heißt Randpunkt von $A :\Longleftrightarrow$

$$\forall \delta > 0 : \ U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset \ \wedge U_\delta(x_0) \cap (V \setminus A) \neq \emptyset.$$

2.) $\partial A := \{x \in V : x \text{ ist Randpunkt von } A\}$ heißt Rand von A.

Übung: $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$; ∂A ist abg.

Definition 9 *Es sei $x_0 \in V$. $U \subseteq V$ heißt Umgebung von x_0 $:\Longleftrightarrow \ \exists \delta > 0 : \ U_\delta(x_0) \subseteq U$.*

Satz 9 *Es sei $A \subseteq V$. Es gilt:*

1.) $x_0 \in H(A) \iff$ Es ex. eine Folge (x_n) in $A \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

2.) A ist abg. $\iff$ Für jede konv. Folge (x_n) in A gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

Beweis: 1.) Sei $x_0 \in H(A)$. Dann gilt:

$$\forall \delta > 0 : \ (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Somit ex. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ (betr. $\delta = 1/n$) ein $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ mit $||x_n - x_0|| < 1/n$. Damit ist (x_n) konv. Folge in $A \setminus \{x_0\}$ mit GW x_0.

Sei umgek. (x_n) konv. Folge in $A \setminus \{x_0\}$ mit GW x_0. Sei $\delta > 0$. Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $||x_{n_0} - x_0|| < \delta$, und es gilt

$$x_{n_0} \in (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A.$$

Also gilt $x_0 \in H(A)$.

2.) Sei A abg. Sei (x_n) eine konv. Folge in A mit GW $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$.

1.Fall: $x_n = x_0$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_0 \in A$.

2.Fall: $x_n \neq x_0$ für unendl. viele $n \in \mathbb{N}$, etwa für $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Dann ist (x_{n_k}) eine konv. Folge in $A \setminus \{x_0\}$ mit GW x_0, also (nach 1.)) $x_0 \in H(A) \subseteq A$.

Sei umgek. der GW jeder konv. Folge in A wieder in A. Sei $x_0 \in H(A)$. Nach 1.) ex. eine Folge (x_n) in $A \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Nach Vor. gilt $x_0 \in A$. Somit ist $H(A) \subseteq A$, also ist A abg. ■

Bsp.: Betr. $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Euklidnorm $||.||$. Es sei

$$A := U_1((0,0)) \cup \{(2 + 1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt:
$A^\circ = U_1((0,0))$
$H(A) = \{(x,y) : ||(x,y)|| \leq 1\} \cup \{(2,0)\}$
$\overline{A} = H(A) \cup A$
$\partial A = \{(x,y) : ||(x,y)|| = 1\} \cup \{(2 + 1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(2,0)\}$.

3 Reihen, Grenzwerte, Stetigkeit

Es sei $(V, ||.||)$ ein NLR. Ist (x_n) eine Folge in V so ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ wie in Ana I durch die Konvergenz der Folge $(\sum_{k=1}^{n} x_k)$ definiert, und absolute Konvergenz durch Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$. Für endlichdimensionale Räume (oder allgemeiner falls V vollständig ist) gelten sinngemäß das Majorantenkrit., das Wurzel- und Quotientenkrit. und das Cauchykrit. (mit denselben Beweisen). Z.B.: Ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{||x_n||} < 1$ so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut.

Bsp.: Betr. $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit einer submultipl. Norm $|||.|||$. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

$$|||\frac{1}{k!}A^k|||^{1/k} \leq \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}\sqrt[k]{|||A|||^k} = \frac{|||A|||}{\sqrt[k]{k!}} \to 0$$

für $k \to \infty$. Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

absolut ($A^0 := I$, die Einheitsmatrix). Der Reihenwert ist eine $n \times n$ Matrix. Diese Matrix bezeichnen wir mit e^A. Betr. z.B. $(n = 2)$:

$$A := \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt $(k \in \mathbb{N}_0)$:

$$A^k = \lambda^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} & 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ \lambda e^\lambda & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

Bea.: Nach Satz 4 konv. eine Folge von Matrizen $(A_k) = ((a_{ij}^{(k)}))$ genau dann, wenn alle reellen Folgen $(a_{ij}^{(k)})$ konvergieren.

Definition 10 *Es seien $(V, ||.||_1)$, $(W, ||.||_2)$ NLRe, $D \subseteq V$, x_0 HP von D und $f : D \to W$ eine Funktion. Weiter sei $y_0 \in W$.*

$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 :\iff$ *Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ gilt: $f(x_n) \to y_0$ $(n \to \infty)$.*

Wie in Ana I beweist man:

Satz 10 *Unter den Vor. obiger Def. gilt:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \setminus \{x_0\} : ||x - x_0||_1 < \delta \Rightarrow ||f(x) - y_0||_2 < \varepsilon.$$

Bsp.: 1.) Betr. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z, x^2 y + e^z)$. Es gilt

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} = (2, 2).$$

Ausführlich: Ist $((x_n, y_n, z_n))$ eine Folge in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 1, 0)\}$ mit GW $(1, 1, 0)$, so gilt $x_n \to 1$, $y_n \to 1$, $z_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Damit gilt: $x_n^2 + y_n^2 - z_n \to 2$, $x_n^2 y_n + e^{z_n} \to 2$ $(n \to \infty)$. Also $(x_n^2 + y_n^2 - z_n, x_n^2 y_n + e^{z_n}) \to (2, 2)$ $(n \to \infty)$.

2.) Betr. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Die Folge $((1/n, 0))$ hat GW $(0, 0)$ und $f(1/n, 0) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$.

Die Folge $((1/n, 1/n))$ hat GW $(0, 0)$ und $f(1/n, 1/n) = 1/2 \to 1/2$ $(n \to \infty)$.

Somit ex. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ nicht!

Definition 11 *Es seien $(V, ||.||_1)$, $(W, ||.||_2)$ NLRe, $D \subseteq V$, $x_0 \in D$ und $f : D \to W$ eine Funktion.*

f heißt stetig in x_0 $:\iff$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

Bem.: Ist $x_0 \in D$ auch HP von D so gilt: f ist stetig in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Wie in Ana I beweist man:

Satz 11 *Unter den Vor. obiger Def. gilt:*

f ist stetig in $x_0 \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : ||x - x_0||_1 < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)||_2 < \varepsilon.$$

Bem.: Ebenfalls wie in Ana I beweist man ($f, g : D \to W$, $h : D \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

1.) x_0 sei HP von D. Es gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \lim_{x \to x_0} g(x) = z_0, \lim_{x \to x_0} h(x) = \lambda \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} h(x)(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \lambda(\alpha y_0 + \beta z_0),$$

sowie $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lambda \neq 0 \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D : h(x) \neq 0$$

und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lambda}.$$

2.) Sei $x_0 \in D$. Es gilt:

f, g, h stetig in $x_0 \Rightarrow h(\alpha f + \beta g)$ stetig in x_0,

sowie

h stetig in x_0 und $h(x_0) \neq 0 \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D : h(x) \neq 0$$

und

$$\frac{1}{h} : U_\delta(x_0) \cap D \to \mathbb{R}$$

ist stetig in x_0.

Bem.: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f = (f_k)_{k=1}^m : D \to \mathbb{R}^m$ ist stetig in $x_0 \in D$ genau dann wenn jede Koordinatenfunktion $f_k : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 ist.

Ebenso wie in Ana I beweist man: Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig. Genauer gilt: Sind $(V, ||.||_1)$, $(W, ||.||_2)$, $(Z, ||.||_3)$ NLRe, $D \subseteq V$, $E \subseteq W$ und $f : D \to W$, $g : E \to Z$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$ so gilt: Ist f stetig in $x_0 \in D$ und g stetig in $f(x_0)$, so ist $g \circ f : D \to Z$ stetig in x_0.

Definition 12 *Es seien $(V, ||.||_1)$, $(W, ||.||_2)$ NLRe, $D \subseteq V$, und $f : D \to W$ eine Funktion. Dann heißt*

1.) f stetig auf D :$\iff$ f ist stetig in jedem Punkt $x \in D$.
2.) f glm. stetig auf D :$\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : ||x - y||_1 < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_2 < \varepsilon.$$

3.) f Lipschitz stetig auf D :$\iff$

$$\exists L \geq 0 \forall x, y \in D : ||f(x) - f(y)||_2 \leq L||x - y||_1.$$

Schreibweise $(D \subseteq V)$:

$C(D, W) := \{f : D \to W : f \text{ ist stetig auf } D\}$.

Bem.: Die Eigenschaften *Ex. eines GWs, Stetigkeit, glm. Stetigkeit* und *Lipschitz Stetigkeit* hängen für endlichdimensionale Räume V_n, W_m nicht von den gewählten Normen $||.||_1$, $||.||_2$ ab.

Bsp.: 1.) Ist $k \in \{1, \ldots, n\}$, so ist die (lineare) Funktion $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_k(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_k$ stetig auf $\mathbb{R}^n$. Aus Satz 6 folgt: Jede lineare Abbildung $\Phi \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$ ist Lipschitz stetig auf V_n also insbesondere $\Phi \in C(V_n, W_m)$.

2.) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ $((x, y) \neq (0, 0))$ und $f(0, 0) = 0$. f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen, aber unstetig in $(0, 0)$ da z.B. die Folge $((1/n, 1/n))$ gegen $(0, 0)$ konv. $(n \to \infty)$, aber $f(1/n, 1/n) = 1/2 \to 1/2 \neq 0 = f(0, 0)$.

3.) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}\sin(x-y) \quad ((x,y) \neq (0,0))$$

und $f(0,0) = 0$. f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$|f(x,y)| = \frac{2|xy|}{x^2+y^2}|\sin(x-y)| \leq |\sin(x-y)| \leq |x-y|.$$

Sei $((x_n,y_n))$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit GW $(0,0)$. Dann gilt:

$$|f(x_n,y_n)| \leq |x_n - y_n| \to 0 \Rightarrow f(x_n,y_n) \to 0 = f(0,0).$$

Somit ist f stetig in $(0,0)$, insges. also stetig auf $\mathbb{R}^2$.

4.) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)) = (x^2 - y, \sin(y), \cos(xy)).$$

f ist stetig auf $\mathbb{R}^2$, da jede Koordinatenfunktion f_j $(j = 1,2,3)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

Funktionenfolgen: Es seien $(V, ||.||_1)$, $(W, ||.||_2)$ NLRe. Es sei $D \subseteq V$. Für eine Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : D \to W$ ist punktweise Konvergenz wie in Ana I und glm. Konvergenz auf D gegen ein Funktion $f : D \to W$ analog wie in Ana I durch

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : ||f_n(x) - f(x)||_2 < \varepsilon$$

definiert.

Ebenso wie in Ana I beweist man:

Satz 12 *Es sei $D \subseteq V$ und $x_0 \in D$. Ist (f_n) eine Folge von Funktionen von D nach W, ist jedes f_n stetig in x_0, und konv. (f_n) glm. auf D gegen $f : D \to W$, so ist f stetig in x_0.*

(Analog für Funktionenreihen).

4 Kompakte Mengen

Es sei $(V, ||.||)$ ein NLR.

Definition 13 *$A \subseteq V$ heißt kompakt $:\iff$ Sind $O_j \subseteq V$ $(j \in J)$ offene Mengen mit $A \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$, so gibt es endlich viele Mengen $O_{j_1}, \ldots, O_{j_n}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1,\ldots,n} O_{j_k}$.*
(Man sagt auch: Jede Überdeckung von A durch offene Mengen enthält eine endliche Teilüberdeckung.)

Satz 13 *Ist $A \subseteq V$ kompakt, so ist A beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis: Betr. die Mengen $O_j := U_j(0)$ $(j \in \mathbb{N})$. Jedes O_j ist offen und $A \subseteq V = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} O_j$. Nach Vor. ex. $O_{j_1}, \ldots, O_{j_n}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{k=1,\ldots,n} O_{j_k} = U_{\max\{j_1,\ldots,j_n\}}(0).$$

Also ist A beschränkt.
Nun sei (x_n) eine konv. Folge in A mit GW $x_0 \in V$. Wir zeigen $x_0 \in A$. Ang.: $x_0 \notin A$. Setze

$$O_j := \{x \in V : ||x - x_0|| > 1/j\} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Alle O_j sind offen (Übung) und

$$A \subseteq V \setminus \{x_0\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} O_j.$$

Nach Vor. ex. $O_{j_1}, \ldots, O_{j_m}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{k=1,\ldots,m} O_{j_k} = O_{\max\{j_1,\ldots,j_m\}},$$

insbes. also $||x_n - x_0|| > 1/\max\{j_1, \ldots, j_m\}$ $(n \in \mathbb{N})$. W! ■

Bem.: In unendlichdimensionalen Räumen sind beschr. und abg. Mengen i.a. nicht kompakt. (Übung: Der Raum l^∞ bestehend aus allen beschränkten Folgen (x_k) und versehen mit der Norm $||(x_k)|| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$ ist ein NLR. Die Menge A aller Folgen der Form $(\delta_{kj})_k$ $(j \in \mathbb{N})$ ist beschr., abg. aber nicht kompakt.)

Es gilt aber:

Satz 14 *(Heine Borel)*
Es sei $(V_n, ||.||)$ ein endlichdim. NLR und $\emptyset \neq A \subseteq V_n$ beschränkt und abgeschlossen. Dann ist A kompakt.

Beweis: Es seien O_j $(j \in J)$ offene Mengen die A überdecken. Zu $x \in A$ betrachten wir die Menge

$$\{r > 0 : \exists j \in J : U_r(x) \subseteq O_j\}$$

Ist diese Menge für ein $x \in A$ unbeschr. so folgt die Beh. (da A beschr. ist). Wir betr. also den Fall, daß diese Menge für jedes $x \in A$ beschr. ist und def. $g : A \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \sup\{r > 0 : \exists j \in J : U_r(x) \subseteq O_j\}$$

Offensichtlich gilt $g(x) > 0$ $(x \in A)$, also

$$g_0 := \inf\{g(x) : x \in A\} \geq 0.$$

Beh.: $g_0 > 0$. Ang.: $g_0 = 0$. Dann ex eine Folge (x_k) in A mit $0 < g(x_k) < 1/k$, also $g(x_k) \to 0$ $(k \to \infty)$. Nach dem Satz von Bolz. Weierstr. besitzt (x_k) eine konv. TF (x_{k_l}) deren Limes x_0 in A liegt (da A abg. ist). Weiter ist

$$g(y) \leq ||x - y|| + g(x) \quad (x, y \in A),$$

denn sonst gäbe es ein $j \in J$ und ein $r > ||x - y|| + g(x)$ mit $U_r(y) \subseteq O_j$. Dann gilt für $z \in U_{r - ||x-y||}(x)$:

$$||z-y|| \leq ||z-x||+||x-y|| < r-||x-y||+||x-y|| = r \Rightarrow z \in O_j.$$

W! zur Def. von $g(x)$.

Wir erhalten den Widerspruch

$$0 < g(x_0) \leq ||x_0 - x_{k_l}|| + g(x_{k_l}) \to 0 \quad (l \to \infty).$$

Also ist $g_0 > 0$. Damit ex. zu jedem $x \in A$ ein $r(x) > g_0/2$ und ein $j(x) \in J$ mit $Q_x := U_{r(x)}(x) \subseteq O_{j(x)}$. Von diesen Q_x genügen aber endlich viele um A zu überdecken. Ang. dies ist nicht der Fall. Wähle $x_1 \in A$. Wähle

$$x_2 \in A \setminus Q_{x_1},\ x_3 \in A \setminus (Q_{x_1} \cup Q_{x_2}),\ x_4 \in A \setminus (Q_{x_1} \cup Q_{x_2} \cup Q_{x_3}),\ \ldots$$

Man erhählt eine Folge (x_k) in A mit $||x_k - x_l|| \geq g_0/2$ $(k \neq l)$, und eine solche Folge kann keine konv. TF besitzen. W! Damit überdecken aber erst recht die zugeh. endlich vielen $O_{j(x)}$ die Menge A. ■

Mit den Sätzen von Bolzano Weierstraß und Heine Borel erhält man damit folgende Charakterisierungen kompakter Mengen in endlichdim. NLRen:

Satz 15 *Sei $A \subseteq V_n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.) A ist kompakt.

2.) A ist beschränkt und abgeschlossen.

3.) Jede Folge (x_k) in A besitzt eine konvergente TF (x_{k_l}) mit

$$\lim_{l \to \infty} x_{k_l} \in A.$$

Bem.: Die Äquivalenz von 1.) und 3.) gilt auch in unendlichdimensionalen NLRen. (Ohne Beweis.)

Satz 16 *Es seien $(V_n, ||.||_1), (W_m, ||.||_2)$ endlichdim. NLRe. Weiter sei $\emptyset \neq D \subseteq V_n$ kompakt und $f : D \to W_m$ stetig. Dann gilt:*

1.) $f(D)$ ist kompakt.

2.) Ist $W_m = \mathbb{R}$ so existieren $x_1, x_2 \in D$ mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad (x \in D).$$

Beweis: (Wie in Ana I) :

1.) Es sei (y_k) eine Folge in $f(D)$ und (x_k) eine zugeh. Urbildfolge in D, also $f(x_k) = y_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Da D kompakt ist ex. eine konv. TF (x_{k_l}) von (x_k) deren GW x_0 in D liegt. Da f stetig ist konv. $(y_{k_l}) = (f(x_{k_l}))$ gegen $f(x_0) \in f(D)$. Also hat jede Folge in $f(D)$ eine konv. TF deren GW in $f(D)$ liegt. Somit ist $f(D)$ kompakt (vgl Satz 15).

2.) Nach 1.) ist $f(D)$ kompakt, insbes. beschränkt. Damit ex. $M := \sup f(D)$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ex. nun ein $y_k \in f(D)$ mit $M - y_k < 1/k$. Die Folge (y_k) konv. also gegen M. Da $f(D)$ abg. ist folgt $M \in f(D)$. Also ex ein Urbild $x_2 \in D$ mit $f(x_2) = M$. (x_1 analog). ■

Wie in Ana I beweist man:

Satz 17 *Es seien* $(V_n, ||.||_1), (W_m, ||.||_2)$ *endlichdim. NLRe, es sei* $\emptyset \neq D \subseteq V_n$ *kompakt und* $f : D \to W_m$ *stetig. Dann ist* f *glm. stetig auf* D.

Bem.: Satz 16 und Satz 17 gelten auch in unendlichdimensionalen NLRen. (Ohne Beweis.)

5 Differenzierbarkeit

Ab jetzt betr. wir nur noch endlichdim. NLRe o.B.d.A. repräsentiert durch $(\mathbb{R}^n, ||.||)$. Wir unterscheiden auch die Normen nicht mehr. $||x||$ bezeichnet i.f. immer die Euklidnorm und bezieht sich im folgenden stets auf den Raum aus dem x stammt. Die Norm einer Matrix A, bez. mit $|||A|||$, ist stets im Sinne von Satz 6 zu verstehen.

Im folgenden sei stets $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Definition 14 *Es sei $x_0 \in D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt x_0 differenzierbar (db) (auch total db, Fréchet db) $:\iff$ Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit:*

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{||h||} \to 0 \ (h \to 0).$$

In diesem Fall heißt A die Ableitung von f an der Stelle x_0. Schreibweise: $f'(x_0) := A$.

Bem.: 1.) Übereinstimmung mit dem eindim. Fall: Sei $n = m = 1$ und D ein offenes Intervall. In diesem Fall bedeutet obige Def.: Es existiert eine 1×1 Matrix, d.h. eine reelle Zahl a mit

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{|h|} \to 0 \ (h \to 0) \iff$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to a \ (h \to 0).$$

2.) Die Matrix in obiger Def. ist eindeutig bestimmt: Sind $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Ableitung von f an der Stelle x_0 und $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$, so gilt für $t > 0$:

$Az - Bz = ||z||(f(x_0+tz) - f(x_0) - B(tz))/||tz|| -$
$||z||(f(x_0+tz) - f(x_0) - A(tz))/||tz|| \to 0 \ (t \to 0+).$

Also gilt $A = B$.

3.) Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ in jedem Punkt $x \in D$ db, so heißt f db auf D. In diesem Fall ist durch $x \mapsto f'(x)$ eine Abbildung $f' : D \to \mathbb{R}^{m\times n}$ erklärt. Ist f' stetig so heißt f stetig db auf D. $C^1(D, \mathbb{R}^m) := \{f : D \to \mathbb{R}^m : \ f$ ist stetig db auf D$\}$.

4.) Existenz und Wert der Ableitung einer Funktion hängen nicht von den verwendeten Normen ab.

Satz 18 *Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ in x_0 db, so ist f in x_0 stetig.*

Beweis: Bea.: x_0 ist innerer Punkt von D, somit ist x_0 HP von D. Es gilt ($x \in D$, $x \neq x_0$): $f(x) - f(x_0) =$

$$||x - x_0|| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{||x - x_0||} + f'(x_0)(x - x_0)$$

$\to 0$ ($x \to x_0$), also $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

Probleme: 1.) Wie sieht man einer Fkt. an ob sie an einer Stelle x_0 db. ist?

2.) Wie bestimmt man die Matrix $f'(x_0)$?

3.) Wie rechnet man mit Ableitungen?

Bsp.: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $f(x) = Ax + b$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Dann gilt:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{||h||} = 0 \to 0 \ (h \to 0).$$

Also ist f auf $\mathbb{R}^n$ db. und $f'(x) = A$ ($x \in \mathbb{R}^n$).

Satz 19 *(Kettenregel) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $E \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, und $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : E \to \mathbb{R}^l$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Ist dann f db. in $x_0 \in D$ und g db. in $f(x_0) \in E$, so ist $F := g \circ f : D \to \mathbb{R}^l$ db. in x_0 und es gilt:*

$$F'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \quad (\in \mathbb{R}^{l\times n}).$$

Beweis: Setze $y_0 = f(x_0),\ A = f'(x_0),\ B = g'(y_0)$ und $u(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah,\ v(k) = g(y_0 + k) - g(y_0) - Bk$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{R}^m$, für die $f(x_0 + h)$ und $g(y_0 + k)$ definiert sind. Zu vorgegebenem h setze man

$$k(h) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

f ist db. in x_0, somit ist f stetig in $x_0 \Longrightarrow k(h) \to 0 \quad (h \to 0)$. Damit existiert ein $\delta > 0$ so, daß für $h \in U_\delta(0)$ sowohl $f(x_0 + h)$ als auch $g(y_0 + k(h))$ definiert sind.
Es gilt

$$\begin{aligned} \|k(h)\| &= \|Ah + u(h)\| \\ &\leq \left(|||A||| + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \right) \|h\| \quad (h \in U_\delta(0)\backslash\{0\}). \end{aligned}$$

Weiter gilt für $h \in U_\delta(0)\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned} & F(x_0 + h) - F(x_0) - BAh \\ &= g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) - BAh \\ &= g(y_0 + k(h)) - g(y_0) - BAh = B(k(h) - Ah) + v(k(h)) \\ &= B(u(h)) + v(k(h)) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} & \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - BAh\|}{\|h\|} \\ & \leq |||B||| \cdot \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|v(k(h))\|}{\|h\|}. \qquad (*) \end{aligned}$$

Setze

$$w(h) := \begin{cases} \frac{\|v(k(h))\|}{\|k(h)\|} & \text{falls } k(h) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k(h) = 0 \end{cases} \qquad (h \in U_\delta(0)) \,.$$

w ist in 0 stetig und

$$\begin{aligned} (*) &= |||B||| \, \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} + w(h) \, \frac{\|k(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq |||B||| \, \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} + w(h) \left(|||A||| + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \right) \to 0 \ (h \to 0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bem.: Weitere Ableitungsregeln (Übung): Sind $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ db in x_0, so ist

1.) $f + g$ db in x_0 und $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ und

2.) λf db in x_0 und $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Definition 15 *Es seien $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und $\{u_1, \ldots, u_m\}$ die Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.*
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit den Komponentenfunktionen $f_k : D \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, m)$ (bea.: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x) u_k$).

Für $x_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in D$ und $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$ definieren wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(x_0) &:= (f_i)_{\xi_j}(x_0) := (D_j f_i)(x_0) \\ &:= \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_0 + te_j) - f_i(x_0)}{t} \end{aligned}$$

falls dieser GW existiert. In diesem Fall heißt dieser GW partielle Ableitung von f_i nach der j. Koordinate an der Stelle x_0. Bea.: $D_j f_i$ ist die Ableitung von f_i bzgl. x_j, wobei die anderen Variablen fest bleiben. Existieren alle partiellen Ableitungen $(D_j f_i)(x_0)$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$, so heißt f an der Stelle x_0 partiell db. Existieren alle partiellen Ableitungen für jedes $x \in D$, so heißt f auf D partiell db. Sind dann auch noch alle partiellen Ableitungen auf D stetig, so heißt f auf D stetig partiell db.

Bsp.: 1.) Betr. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 z \\ e^y xz \end{pmatrix}$

Koordinatenfkt.: $f_1(x, y, z) = x^2 z,\ f_2(x, y, z) = e^y xz$.

Es gilt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 2xz,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = 0,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = x^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = e^y z,\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = e^y xz,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = e^y x.$$

2.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Es gilt: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$. Analog: $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
f ist also in $(0,0)$ partiell db. Aber f ist nicht db. in $(0,0)$, denn f ist nicht stetig in $(0,0)$.

Satz 20 *Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine in $x_0 \in D$ db. Funktion. Dann ist f in x_0 partiell db. und es gilt:*

$$f'(x_0)e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x_0) u_i \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Beweis: Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ fest. Da f in x_0 db. ist, gilt:

$$\frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0) - f'(x_0)(te_j)}{|t|} \quad \to 0$$

für $t \to 0$ und damit

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_j) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)e_j$$
$$\Longrightarrow \lim_{t\to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x_0+te_j) - f_i(x)}{t} u_i = f'(x_0)e_j.$$

Da Konvergenz in $\mathbb{R}^m$ koordinatenweise Konv. bedeutet, existiert die GW $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f_i(x+te_j)-f_i(x)}{t}$ $(i=1,\ldots,m)$.
Damit gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m (D_jf_i)(x_0)u_i &= \sum_{i=1}^m \left(\lim_{t\to 0}\frac{f_i(x_0+te_j)-f_i(x_0)}{t}\right)u_i \\ &= f'(x_0)e_j. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Folgerung: Ist $f: D\to\mathbb{R}^m$ in x_0 db., so hat die Matrix $f'(x_0)$ also folgende Gestalt:

$$f'(x_0)=\begin{pmatrix}(D_1f_1)(x_0) & \cdots & (D_nf_1)(x_0)\\ \vdots & & \vdots \\ (D_1f_m)(x_0) & \cdots & (D_nf_m)(x_0)\end{pmatrix}.$$

Definition 16 *Sei V ein VR. Eine Menge $A\subseteq V$ heißt konvex $:\Leftrightarrow$ für alle $x,y\in A$ gilt: Die Verbindungsstrecke $S(x,y):=\{tx+(1-t)y : t\in[0,1]\}\subseteq A$.*

Ist $(V,\|\cdot\|)$ ein NLR, so sind z.B. Kugeln $U_r(x)$ $(r>0, x\in V)$ stets konvex. (Übung)

Satz 21 *(Mittelwertsatz): Es sei $f: D\to\mathbb{R}$ db. auf D und $a,b\in D,\ a\neq b$ mit $S(a,b)\subseteq D$. Dann gilt:*

$$\exists\, \xi\in S(a,b)\setminus\{a,b\}:\ f(b)-f(a)=\underbrace{f'(\xi)}_{1\times n-\text{Matrix}}\cdot(b-a).$$

Beweis: Es sei $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ definiert durch $\gamma(t)=(1-t)a+tb$. Nach Vor ist $\gamma(t)\in D$ $(t\in[0,1])$. Es sei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definiert durch $g(t) = f(\gamma(t))$. g ist stetig auf $[0,1]$. Aus der Kettenregel folgt: g ist db. auf $(0,1)$ und $g'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f'(\gamma(t))(b-a)$. Aus dem MWS (in $\mathbb{R}$) folgt:

$$\exists\, \tau \in (0,1) : g(1) - g(0) = g'(\tau)(1-0).$$

Für $\xi := \gamma(\tau)$ gilt somit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a). \qquad \blacksquare$$

Folgerung: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ db. auf D, D konvex und

$$\|f'(x)\| \leq L \quad (x \in D),$$
$$\nearrow \text{ Eukl.Norm} = |||.|||$$

dann gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\| \qquad (x, y \in D).$$

Beweis: Sei $x, y \in D$. Dann ex. ein $\xi \in S(x,y)$ mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| \leq_{\text{(CSU)}} \|f'(\xi)\|\, \|x-y\| \leq L\|x-y\|$. $\blacksquare$

Bemerkung: Satz 21 gilt i.a. **nicht** für Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit $m > 1$. Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sei def. durch $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$. Dann gilt für kein ξ:

$$f(2\pi) - f(0) = (0,0) = (-\sin(\xi), \cos(\xi))2\pi = f'(\xi)(2\pi - 0).$$

Satz 22 *Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann gilt: $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow f$ ist auf D stetig partiell db.*

Beweis: Sei $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$. Nach Satz 20 gilt:

$$\begin{aligned} & (D_j f_i)(x) = (f'(x)e_j) \cdot u_i \quad \text{für alle } i, j \text{ und } x \in D. \\ \Rightarrow\ & D_j f_i(y) - D_j f_i(x) = ((f'(y) - f'(x))e_j) \cdot u_i \end{aligned}$$

und wegen $\|e_j\| = \|u_i\| = 1$ folgt

$$\begin{aligned} |(D_j f_i)(y) - (D_j f_i)(x)| &\leq_{(\text{CSU})} \|(f'(y) - f'(x))e_j\| \\ &\leq |||f'(y) - f'(x)||| \end{aligned}$$

$(x, y \in D)$. Also ist $D_j f_i$ stetig auf D.

Um die Umkehrung zu beweisen, genügt es, den Fall $m = 1$ zu betrachten. Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$. Da D offen ist, ex. eine Kugel $U_r(x) \subseteq D$ und wegen der Stetigkeit von $D_j f$ $(j = 1, \dots, n)$ kann $r > 0$ so gewählt werden, daß

$$|(D_j f)(y) - (D_j f)(x)| < \frac{\varepsilon}{n} \quad (y \in U_r(x),\ j = 1, \dots, n).$$

Sei $h = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j e_j,\ \|h\| < r$ und sei $v_0 = 0$ und

$$v_k = h_1 e_1 + \dots + h_k e_k \quad (1 \leq k \leq n),$$

dann gilt:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{j=1}^{n} (f(x + v_j) - f(x + v_{j-1})).$$

Wegen $\|v_k\| < r$ $(0 \leq k \leq n)$ und da $U_r(x)$ konvex ist, gilt

$$S(x + v_{j-1},\ x + v_j) \subseteq U_r(x) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Wegen $v_j = v_{j-1} + h_j e_j$ folgt aus dem MWS (in $\mathbb{R}$, für die Funktion $t \mapsto f(x + v_{j-1} + t h_j e_j)$, $t \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} &\exists\, \xi_j \in S(x + v_{j-1}, x + v_j) : f(x + v_j) - f(x + v_{j-1}) \\ &\quad = h_j (D_j f)(\xi_j) \\ &\quad \Rightarrow \left|f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(x)\right| \\ &\quad \leq \underbrace{\left| f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(\xi_j) \right|}_{=0} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left| \sum_{j=1}^{n} h_j((D_j f)(\xi_j) - (D_j f)(x)) \right| \\
&\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} |h_j| \leq_{(\mathrm{CSU})} \varepsilon \|h\| \quad (\|h\| < r)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow f$ ist in x db. und $f'(x) = ((D_1 f)(x), \ldots, (D_n f)(x))$.

Da alle Funktionen $D_j f$ stetig auf D sind, ist auch $f' : D \to \mathbb{R}^{1 \times n}$ stetig, insges. also $f \in C^1(D, \mathbb{R})$. ■

Beispiel: 1.) Betr.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\; f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y^3 \\ e^x y \end{pmatrix}$.
f ist stetig partiell db., somit ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und

$$
f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 & 3x^2 y^2 \\ e^x y & e^x \end{pmatrix} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).
$$

2.) $f : \underbrace{\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}}_{=:D} \to \mathbb{R};\; f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.
$f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $f'(x,y,z) = -\frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,(x,y,z)$.

3.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\; f(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ \sin x \end{pmatrix}$, $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$;
$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ \cos x \end{pmatrix}$.

Schreibweise: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 partiell db., so schreibt man auch

$$
\operatorname{grad} f(x_0) := ((D_1 f)(x_0), \ldots, (D_n f)(x_0)).
$$

Ist f an der Stelle x_0 db., so ist also

$$
f'(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0).
$$

Ist $f : D \to \mathbb{R}^m,\ f = (f_1, \ldots, f_m)$ db. in x_0, so ist

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

Definition 17 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Wir definieren*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \quad (\in \mathbb{R})$$

falls dieser GW existiert. In diesem Fall heißt dieser GW Richtungsableitung von f an der Stelle x_0 in Richtung v.

Bemerkung: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 partiell db., so ist $(D_j f)(x_0)$ die Richtungsableitung von f in Richtung $e_j \quad (j = 1, \ldots, n)$.

Satz 23 *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ db. und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$, so gilt*

1. $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = f'(x_0)v = (\operatorname{grad} f(x_0)) \cdot v.$
2. $\max\left\{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) : v \in \mathbb{R}^n;\ \|v\| = 1\right\} = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|.$

Beweis: 1.) Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\gamma(t) = x_0 + tv$. Es existiert $\varepsilon > 0$ mit $\gamma(t) \in D$ $(|t| < \varepsilon)$. Sei $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) = f(\gamma(t))$. Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = g'(0) = f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = (\operatorname{grad} f(x_0)) \cdot v.$$

2.) Klar falls $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$. Sei $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right| = |(\operatorname{grad} f(x_0))v| \leq \|\operatorname{grad} f(x_0)\|\ \|v\| = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$$

und für $v_0 = \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v_0}(x_0) = (\operatorname{grad} f(x_0)) \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|} = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|. \blacksquare$$

Bem.: Anschauung: grad $f(x_0)$ zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs.