6 Der Fixpunktsatz von Banach

Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger NLR.

Satz 24 *(Fixpunktsatz von Banach).*
Ist $A \subseteq V$ abg. und nicht leer, und $g : A \to A$ eine Abbildung mit

$$\|g(x) - g(y)\| \leq q\|x - y\| \quad (x, y \in V)$$

für ein $0 \leq q < 1$. Dann besitzt g genau einen Fixpunkt, d.h. es existiert genau ein $x \in A$ mit $g(x) = x$.

Beweis: Wähle $x_0 \in A$ beliebig. Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sei rekursiv def. durch $x_{n+1} = g(x_n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Es gilt

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|g(x_n) - g(x_{n-1})\| \leq q\|x_n - x_{n-1}\|.$$

Induktiv erhält man

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq q^n\|x_1 - x_0\| \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Für $1 \leq n < m$ gilt damit

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k - x_{k-1}\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{m} q^{k-1}\right) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \left(q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) \|x_1 - x_0\| = \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Wegen $q^n \to 0$ $(n \to \infty)$ ist (x_n) somit eine CF. Da V vollständig ist konv. (x_n), und da A abg. ist gilt $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in A$. Da g stetig (sogar Lipschitz stetig) ist, gilt $x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$.

Somit ist $g(x) = x$. Also hat g einen Fixpunkt. Ist $\tilde{x}$ ein weiterer Fixpunkt, so folgt aus $\|x - \tilde{x}\| = \|g(x) - g(\tilde{x})\| \leq q\|x - \tilde{x}\|$: $||x - \tilde{x}|| = 0$. Somit existiert genau ein Fixpunkt. ∎

7 Vorbereitungen zum Satz über die Umkehrfunktion

Satz 25 *Sei Ω die Menge aller invertierbaren Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt*

1.) Ist $A \in \Omega, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und gilt $|||B - A||| < 1/|||A^{-1}|||$, so ist $B \in \Omega$.

2.) Ω ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $A \to A^{-1}$ ist eine stetige Abbildung von Ω nach $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Bew.: 1.) Setze $\alpha := 1/|||A^{-1}|||$ und $\beta = |||B - A|||$. Dann ist $\beta < \alpha$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned}\alpha\|x\| = \alpha\|A^{-1}Ax\| &\leq \alpha|||A^{-1}|||\ \|Ax\| = \|Ax\| \\ &\leq \|(A-B)x\| + \|Bx\| \leq \beta\|x\| + \|Bx\|,\end{aligned}$$

daher ist $(\alpha - \beta)\|x\| \leq \|Bx\|$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Wegen $\alpha - \beta > 0$ ist B injektiv, somit (vgl. L.A.) surjektiv. Also ist $B \in \Omega$. Dies gilt für jedes B mit $|||B - A||| < \alpha$. Also gilt $U_\alpha(A) \subseteq \Omega$. Damit ist Ω offen.

2.) Seien $A \in \Omega$ und $B \in U_\alpha(A)$ (α, β wie in Teil 1.)). Es gilt $(\alpha - \beta)\|B^{-1}y\| \leq \|BB^{-1}y\| = \|y\|$ $(y \in \mathbb{R}^n)$. Also gilt $|||B^{-1}||| \leq \frac{1}{\alpha-\beta}$. Wegen $B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$ gilt

$$|||B^{-1} - A^{-1}||| \leq |||B^{-1}|||\ |||A - B|||\ |||A^{-1}||| \leq \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)}.$$

Für $B \to A$ folgt $\beta \to 0$ und somit $B^{-1} \to A^{-1}$. $\blacksquare$

Satz 26 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ und gilt $|||f'(x)||| \leq L$ $(x \in D)$. Dann gilt*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad (x, y \in D).$$

(Vgl. Gr. Übung.)

Bew.: 1. Fall $n = 1$: D ist also ein offenes Intervall $\subseteq \mathbb{R}$. Seien $x, y \in D$. Setze $z = f(x) - f(y)$. Es sei $g : D \to \mathbb{R}$ def. durch $g(t) = z \cdot f(t)$. Nach dem MWS in $\mathbb{R}$ ex. ein ξ zwischen x und y mit $g(x) - g(y) = (z \cdot f'(\xi))(x - y)$.

$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\|^2 = (f(x) - f(y)) \cdot (f(x) - f(y)) = z \cdot (f(x) - f(y))$

$\quad = g(x) - g(y) = (z \cdot f'(\xi)) \cdot (x - y) \leq |x - y| \, |z \cdot f'(\xi)|$

$\quad \leq |x - y| \, \|f(x) - f(y)\| \, \|f'(\xi)\| \leq L|x - y| \, \|f(x) - f(y)\|$

$\Rightarrow$ Beh.

2. Fall n bel.: Sei $x, y \in D$. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ def. durch $\gamma(t) = (1 - t)y + tx$ und $I = \{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in D\}$. ($I$ ist ein offenes Intervall). Sei $g : I \to \mathbb{R}^m$ def. durch $g(t) = f(\gamma(t))$.

Dann gilt $g'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot (x - y)$,
und daher $\|g'(t)\| \leq |||f'(\gamma(t))||| \, \|x - y\| \leq L\|x - y\|$ $(t \in I)$.

Aus dem 1. Fall folgt:

$$\|g(1) - g(0)\| = \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

8 Der Satz über die Umkehrfunktion

Dieser Satz besagt in groben Zügen, daß eine stetig differenzierbare Abbildung f in einer Umgebung eines jeden Punktes x invertierbar ist, an dem $f'(x)$ invertierbar ist.

Satz 27 *(Satz über die Umkehrfunktion):*
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. Weiter sei $x_0 \in D$ und $f'(x_0)$ invertierbar ($\Leftrightarrow \det f'(x_0) \neq 0$). Dann gilt:

1.) Es existiert eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von x_0 und eine offene Umgebung $\widetilde{U}$ von $y_0 := f(x_0)$ derart, daß f injektiv auf U ist und $f(U) = \widetilde{U}$ gilt.

2.) Ist $f^{-1} : \widetilde{U} \to U$ die Inverse von $f : U \to \widetilde{U}$ (gemäß 1.)), so ist $f^{-1} \in C^1(\widetilde{U}, \mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$(f^{-1})'(x) = (f'(f^{-1}(x)))^{-1} \quad (x \in \widetilde{U}).$$

Bspl.: Betr. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ 2e^x y^2 \end{pmatrix}$.
Es gilt: $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und $f'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 2e^x y^2 & 4e^x y \end{pmatrix}$.
Es gilt $\det f'(0,1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion existieren also offene Umgebungen U von $(0,1)$ und $\widetilde{U}$ von $f(0,1) = (0,2)$, so daß $f : U \to \widetilde{U}$ bijektiv ist. $f^{-1} : \widetilde{U} \to U$ ist stetig differenzierbar. Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(0,2) &= (f'(f^{-1}(0,2)))^{-1} = (f'(0,1))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beweis: 1.) Sei $A := f'(x_0)$ und $\lambda := 1/(2|||A^{-1}|||)$.

Da f' in x_0 stetig ist, gibt es eine offene Kugel $U_r(x_0) \subseteq D$ mit $|||f'(x) - A||| < \lambda$ $(x \in U_r(x_0))$. (Bea.: $f'(x)$ ist damit invertierbar für $x \in U_r(x_0)$, vgl. Satz 25.)

Wir ordnen jedem $y \in \mathbb{R}^n$ eine Funktion φ zu, definiert durch $\varphi(x) = x + A^{-1}(y - f(x))$ $(x \in D)$.

Bea.: $f(x) = y \Leftrightarrow x$ ist ein Fixpunkt von φ.
Es gilt: $\varphi'(x) = I - A^{-1}f'(x) = A^{-1}(A - f'(x))$ $(x \in D)$, daher

$$\begin{aligned} |||\varphi'(x)||| &\leq |||A^{-1}|||\ |||A - f'(x)||| \\ &< |||A^{-1}||| \cdot \lambda = \frac{1}{2} \quad (x \in U_r(x_0)). \\ \Rightarrow \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| &\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \quad (x_1, x_2 \in U_r(x_0)). \end{aligned}$$

Somit hat φ höchstens einen Fixpunkt in $U_r(x_0)$, also $f(x) = y$ für höchstens ein $x \in U_r(x_0)$. Damit ist f injektiv auf $U_r(x_0)$. Es sei $U := U_r(x_0)$ und $\widetilde{U} := f(U)$. Wähle $v \in \widetilde{U}$ beliebig, fest. Dann existiert $u \in U : f(u) = v$. Sei $\varepsilon > 0$ so, daß $\overline{U_\varepsilon(u)} = \{x : \|x - u\| \leq \varepsilon\} \subseteq U$. Beh.: Es gilt:

$$\|y - v\| < \lambda\varepsilon \Rightarrow y \in \widetilde{U} \quad \text{(damit ist } \widetilde{U} \text{ offen).}$$

Nachweis: Für y gelte $\|y - v\| < \lambda\varepsilon$. Dann gilt (mit φ wie oben):

$$\|\varphi(u) - u\| = \|A^{-1}(y - v)\| < |||A^{-1}|||\lambda\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - u\| &\leq \|\varphi(x) - \varphi(u)\| + \|\varphi(u) - u\| \\ &< \frac{1}{2}\|x - u\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \quad (x \in \overline{U_\varepsilon(u)}), \end{aligned}$$

also gilt $\varphi(x) \in \overline{U_\varepsilon(u)}$. Somit ist $\varphi : \overline{U_\varepsilon(u)} \to \overline{U_\varepsilon(u)}$ eine Kontraktion. $\overline{U_\varepsilon(u)}$ ist abgeschlossen und nach dem FPS von Banach besitzt φ einen FP $x \in \overline{U_\varepsilon(u)}$.

Für dieses x gilt $f(x) = y$, und somit $y \in f(\overline{U_\varepsilon(u)}) \subseteq f(U) = \widetilde{U}$. Damit ist Teil 1.) bewiesen.

2.) Sei $y \in \widetilde{U}, \; y \neq y+k \in \widetilde{U}$ beliebig. Dann existiert $x \in U, \; x+h \in U$ mit $y = f(x), \; y+k = f(x+h)$. Mit φ wie oben erhält man

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h + A^{-1}(f(x) - f(x+h)) = h - A^{-1}k$$

und damit $\|h - A^{-1}k\| = \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$.

Damit gilt $\|A^{-1}k\| \geq \frac{1}{2}\|h\|$, somit $\|h\| \leq 2|||A^{-1}||| \; \|k\| = \lambda^{-1}\|k\|$.

Nach Konstruktion von U ist $f'(x)$ invertierbar, sei $T := (f'(x))^{-1}$. Wegen

$$\begin{aligned} f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - Tk &= h - Tk \\ &= -T(f(x+h) - f(x) - f'(x)h) \end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - Tk\|}{\|k\|} \\ &\leq |||T||| \; \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|}{\|k\|} \\ &\leq \frac{|||T|||}{\lambda} \; \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|}{\|h\|}. \end{aligned}$$

(Beachte: $h \neq 0$ wegen $k \neq 0$.)

Wegen $\|h\| \leq \lambda^{-1}\|k\|$ folgt aus $k \to 0$ auch $h \to 0$, somit

$$\lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - Tk}{\|k\|} = 0.$$

Damit ist f^{-1} differenzierbar in y und

$$(f^{-1})'(y) = T = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}.$$

Damit ist auch $(f^{-1})' : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig als Komposition stetiger Abbildungen. ■

Eine unmittelbare Folgerung des Satzes über die Umkehrfunktion ist:

Satz 28 *Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in D$, dann ist $f(E)$ offen für jede offene TM E von D. (Man sagt dann auch: f ist eine offene Abbildung von D nach $\mathbb{R}^n$.)*

Beweis: Sei $y \in f(E)$ und $x \in E$ ein Urbild von y. Dann existieren offene Umgebungen U von x und $\widetilde{U}$ von y mit $U \subseteq E$ und $\widetilde{U} = f(U) \subseteq f(E)$. Damit ist y innerer Punkt von $f(E)$. ■

Bem.: Die Vor. dieses Satzes gewährleistet, daß jeder Punkt $x \in E$ eine Umgebung hat, in der f injektiv ist. Ein f mit dieser Eigenschaft heißt auch lokal injektiv. Jedoch ist f in diesem Fall i.a. nicht injektiv:

Bsp.: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ def. durch $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Es gilt:

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2);\ f'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix},$$

also $\det f'(x, y) = e^x \cos^2 y + e^x \sin^2 y = e^x \neq 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$.

Somit ist f lokal injektiv. f ist aber nicht injektiv auf $\mathbb{R}^2$, denn $f(0, 0) = f(0, 2\pi) = (1, 0)$.

9 Der Satz über implizit definierte Funktionen

Motivation: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R})$. Sei $(x_0, y_0) \in D$ eine Lösung der Gleichung $f(x_0, y_0) = 0$.
Problem: Wann kann die Gleichung $f(x, y) = 0$ in der "Nähe" von (x_0, y_0) eindeutig nach x oder y aufgelöst werden?

Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Aufl. nach y:
$g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

Aufl. nach x:
$g(y) = \sqrt{1 - y^2}$. Keine eind. Aufl. nach y möglich.

Notation: Ist $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$ so schreiben wir (x, y) für den Vektor $(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m)$. Jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ $(= \mathbb{R}^{n \times (n+m)})$ läßt sich in zwei lineare Abbildungen A_x und A_y zerlegen, die durch $A_x x := A\binom{x}{0}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ und $A_y y := A\binom{0}{y}$ $(y \in \mathbb{R}^m)$ definiert sind. Dann gilt $A_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $A_y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. A ist damit in zwei Matrixblöcke zerlegt: $A\binom{x}{y} = (A_x\ A_y)\binom{x}{y}$. Es gilt $A\binom{x}{y} = A_x x + A_y y$.

Die lineare Version des Satzes über implizit definierte Funktionen lautet:

Satz 29 *Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$ und ist A_x invertierbar, so existiert zu jedem $y \in \mathbb{R}^m$ genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $A\binom{x}{y} = 0$, nämlich $x = -(A_x)^{-1} A_y y$.*

Bem.: In diesem Fall ist also durch die Gleichung $A\binom{x}{y} = 0$ implizit die Funktion $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ g(y) = -(A_x)^{-1}A_y y$ definiert.

Bew.: $A\binom{x}{y} = 0 \Leftrightarrow A_x x + A_y y = 0 \Leftrightarrow x = -(A_x)^{-1}A_y y.$ ■

Satz 30 *(Satz über implizit def. Funktionen)*

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $(x_0, y_0) \in D$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und für $A = f'(x_0, y_0)$ $(\in \mathbb{R}^{n\times(n+m)})$ sei A_x invertierbar. Dann gibt es offene Mengen $U \subseteq D$ und $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $(x_0, y_0) \in U$ und $y_0 \in \widetilde{U}$, die folgende Eigenschaft haben:

1.) Zu jedem $y \in \widetilde{U}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit:

$$(x, y) \in U \text{ und } f(x, y) = 0.$$

2.) Definiert man $g : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ durch: $g(y)$ ist das eind. best. x aus 1.), so gilt:

$$g(y_0) = x_0,\ f(g(y), y) = 0\ (y \in \widetilde{U}) \text{ und } g \in C^1(\widetilde{U}, \mathbb{R}^n).$$

Ferner gilt: $g'(y_0) = -(A_x)^{-1}A_y$.

Bsp.: $f : \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R};\ f(x, y) = x^2 + y^2 - 1;\ (x_0, y_0) = (1, 0)$.

$f'(x, y) = (2x, 2y)$,
$A = f'(1, 0) = (2, 0)$,
$A_x = f_x(1, 0) = 2$,
$A_y = f_y(1, 0) = 0$,
A_x ist invertierbar.

Bem.: Die Gleichung $f(x, y) = 0$ im Satz über impl. def. Funktionen kann als ein System von n Gleichungen in $n + m$ Unbekannten geschrieben werden.

$$
\begin{aligned}
&f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m) = 0\\
&\vdots\\
&f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m) = 0
\end{aligned}
$$

Die Vor., daß A_x invertierbar ist, bedeutet, daß die $n \times n$-Matrix

$$
\begin{pmatrix}
(D_1 f_1)(x_0, y_0) & \ldots & (D_n f_1)(x_0, y_0)\\
\vdots & & \vdots\\
(D_1 f_n)(x_0, y_0) & \ldots & (D_n f_n)(x_0, y_0)
\end{pmatrix}
$$

invertierbar ist.

Beweis: 1.) Es sei $F : D \to \mathbb{R}^{n+m}$ def. durch $F(x, y) = (f(x, y), y)$. Dann ist $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n+m})$. Wir zeigen zunächst, daß $F'(x_0, y_0)$ invertierbar ist. Für $(x, y) = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m) \in D$ gilt:

$F'(x, y) =$

$$
\begin{pmatrix}
(D_1 f_1)(x,y) & \ldots & (D_n f_1)(x,y) & (D_{n+1} f_1)(x,y) & \ldots & (D_{n+m} f_1)(x,y)\\
(D_1 f_n)(x,y) & \ldots & (D_n f_n)(x,y) & (D_{n+1} f_n)(x,y) & \ldots & (D_{n+m} f_n)(x,y)\\
0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}.
$$

Somit ist $F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} A_x & A_y \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Dabei ist I die $m \times m$-Einheitsmatrix.

Für $(h, k) \in \mathbb{R}^{n+m}$ gilt dann: $\begin{pmatrix} A_x & A_y \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad k = 0 \wedge A_x h + A_y k = 0 \ \Rightarrow \ k = 0 \wedge A_x h = 0$

$\Rightarrow \quad k = 0 \wedge h = 0$. Somit ist die durch die $(n+m) \times (n+m)$-Matrix $F'(x_0, y_0)$ bestimmte lineare Abbildung injektiv. Also ist

$F'(x_0,y_0)$ invertierbar. Somit ist der Satz über die Umkehrfunktion anwendbar. Er liefert die Existenz offener Mengen $O_1 \subseteq D$ mit $(x_0,y_0) \in O_1$ und $O_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ mit $F(x_0,y_0) = (0,y_0) \in O_2$ derart, daß $F : O_1 \to O_2$ bijektiv ist. Wir setzen $U = O_1$ und $\widetilde{U} = \{y \in \mathbb{R}^m : (0,y) \in O_2\}$. (Bea.: $y_0 \in \widetilde{U}$).

$\widetilde{U}$ ist offen, da O_2 offen ist. Ist $y \in \widetilde{U}$, so existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(x,y) \in U$ und $f(x,y) = 0$. Ist $\tilde{x}$ ein weiterer Vektor im $\mathbb{R}^n$ mit $(\tilde{x},y) \in U$ und $f(\tilde{x},y) = 0$ so gilt $F(\tilde{x},y) = (f(\tilde{x},y),y) = (f(x,y),y) = F(x,y)$. Da F auf U injektiv ist, folgt $x = \tilde{x}$.

2.) Es sei $g : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung, die jedem $y \in \widetilde{U}$ das eindeutig bestimmte x gemäß 1.) zuordnet. Ist $G : O_2 \to O_1$ die Umkehrabb. von $F : O_1 \to O_2$ so ist $G \in C^1(O_2, \mathbb{R}^{n+m})$. Aus $F(g(y),y) = (f(g(y),y),y) = (0,y)$ $(y \in \widetilde{U})$ folgt $G(0,y) = (g(y),y)$. Wegen $G \in C^1(O_2,\mathbb{R}^{n+m})$ ist $g \in C^1(\widetilde{U},\mathbb{R}^n)$.

Es sei $\Phi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^{n+m}$ definiert durch $\Phi(y) = (g(y),y)$. Es ist $\Phi \in C^1(\widetilde{U},\mathbb{R}^{n+m})$. Für $y \in \widetilde{U}$ ist

$$\Phi'(y) = \begin{pmatrix} g'(y) \\ I \end{pmatrix} \quad (I \text{ die } m \times m\text{–Einheitsmatrix}).$$

Nach der Kettenregel ist $(f \circ \Phi)'(y) = f'(\Phi(y))\Phi'(y) = f'(g(y),y) \cdot \binom{g'(y)}{I}$. Wegen $(f \circ \Phi)(y) = f(g(y),y) = 0$ $(y \in \widetilde{U})$ ist also $f'(g(y),y) \cdot \binom{g'(y)}{I} = 0$. Insbesondere gilt $0 = A\binom{g'(y_0)}{I} = (A_x \; A_y)\binom{g'(y_0)}{I} = A_x g'(y_0) + A_y \Rightarrow g'(y_0) = -(A_x)^{-1}A_y$. ∎

Bsp.: 1.) Sei $f : \mathbb{R}^{2+3} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y,u,v,w) = \begin{pmatrix} 2e^x + yu - 4v + 3 \\ y\cos x - 6x + 2u - w \end{pmatrix}.$$

Für $(0,1,3,2,7)$ ist $f(0,1,3,2,7) = \begin{pmatrix} 2+3-8+3 \\ 1-0+6-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$f \in C^1(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$ und $f'(x,y,u,v,w) =$

$$\begin{pmatrix} 2e^x & u & y & -4 & 0 \\ -y\sin x - 6 & \cos x & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad A = f'(0,1,3,2,7) =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $A_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_{(u,v,w)} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\det A_{(x,y)} = 2 + 18 = 20 \neq 0 \Rightarrow A_{(x,y)}$ ist invertierbar.

Der Satz über impl. def. Funktionen liefert die Existenz einer Umgebung $\widetilde{U}$ von $(3,2,7)$ und einer Fkt. $g \in C^1(\widetilde{U}, \mathbb{R}^2)$ mit $g(3,2,7) = (0,1)$ und $f(g(u,v,w),u,v,w) = 0$ auf $\widetilde{U}$. Weiter gilt

$$g'(3,2,7) = -(A_{(x,y)})^{-1} A_{(u,v,w)}$$
$$= -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

10 Ableitungen höherer Ordnung

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion.

Definition 19 *Es sei f partiell differenzierbar auf D mit part. Ableitungen $D_1 f, \ldots, D_n f$. Sind die Funktionen $D_j f : D \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, n)$ partiell differenzierbar auf D, so sind die partiellen Ableitungen 2. Ordnung von f def. durch*

$$D_{ij} f := f_{\xi_j \xi_i} := \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j} := D_i(D_j f)$$

(an einer Stelle $x_0 \in D$ bzw. auf D).

Entsprechend werden partielle Ableitungen höherer Ordnung definiert. Weitere Schreibweise:

$$D_{112} f = \frac{\partial^3 f}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} = f_{\xi_2 \xi_1 \xi_1}, \; D_1^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial \xi_1^4} = f_{\xi_1 \xi_1 \xi_1 \xi_1}.$$

f heißt k-mal stetig partiell differenzierbar auf D $:\Leftrightarrow$ alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k \in \mathbb{N}$ von f sind auf D vorhanden und stetig auf D. Bez. in diesem Fall $f \in C^k(D, \mathbb{R})$.

Bem.:

$$C^k(D, \mathbb{R}^m) := \{f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m : \\ \forall j \in \{1, \ldots, m\} : f_j \in C^k(D, \mathbb{R})\}.$$

$$C^0(D, \mathbb{R}^m) := C(D, \mathbb{R}^m); \; C^\infty(D, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(D, \mathbb{R}^m).$$

Die frühere Definition für $C^1(D, \mathbb{R}^m)$ stimmt wegen Satz 22 mit obiger überein.

Bsp.: 1.) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xy^2 \sin z$.
$f_x(x,y) = y^2 \sin z,\ f_y(x,y) = 2xy \sin z$
$f_{xy}(x,y) = 2y \sin z,\ f_{yx}(x,y) = 2y \sin z$
$f_{xx}(x,y) = 0,\ f_{yxz}(x,y) = 2y \cos z$

Bem.: $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

2.) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , \ (x,y) = (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Übung: f_x, f_y ex. auf $\mathbb{R}^2$ und $f_{xy}(0,0) = 1,\ f_{yx}(0,0) = -1$.

Satz 31 *(Satz von Schwarz).*

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\} : D_{ij} f = D_{ji} f$.

Bem.: Insbesondere folgt aus dem Satz von Schwarz:

Ist $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, so kommt es bei der Bildung einer partiellen Ableitung von f der Ordnung $\leq k$ nicht auf die Reihenfolge der Differentiation an.

Bsp.: Ist $f \in C^3(D, \mathbb{R}),\ D \subseteq \mathbb{R}^2$, so ist (bea: $f_x \in C^2(D, \mathbb{R})$):
$f_{xxy} = (f_x)_{xy} = (f_x)_{yx} = f_{xyx} = (f_{xy})_x = (f_{yx})_x = f_{yxx}$.

Beweis: O.B.d.A. sei $x_0 = 0,\ n = 2$.

$$\text{z.Z.} : \quad f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0).$$

D ist offen. $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \{(x,y) : \max\{|x|, |y|\} < \delta\} \subseteq D$.

Sei $(x,y) \in D$ mit $|x|, |y| \in (0, \delta)$ bel., fest.

$$\begin{aligned} F(x,y) &:= f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0). \\ \varphi(t) &:= f(t,y) - f(t,0) \quad (t \in \langle 0, x \rangle). \end{aligned}$$

Dann ist

$$F(x,y) = \varphi(x) - \varphi(0).$$

Aus dem MWS (in $\mathbb{R}$) folgt:
$\exists\ \xi_{xy}$ zwischen 0 und x mit $F(x,y) = \varphi'(\xi_{xy}) \cdot x$. Es ist $\varphi'(t) = f_x(t,y) - f_x(t,0)$, also

$$F(x,y) = x(f_x(\xi_{xy},y) - f_x(\xi_{xy},0)).$$

Es sei $g(s) := f_x(\xi_{xy},s) - f_x(\xi_{xy},0) \quad (s \in \langle 0,y\rangle)$.
Es gilt $g'(s) = f_{xy}(\xi_{xy},s)$ und $g(0) = 0$.

Für ein η_{xy} zwischen 0 und y gilt nun

$$F(x,y) = x(g(y) - g(0)) = xyg'(\eta_{xy}) = xyf_{xy}(\xi_{xy},\eta_{xy}).$$

Analog zeigt man: Es existiert ein $\tilde{\xi}_{xy}$ zwischen 0 und x und ein $\tilde{\eta}_{xy}$ zwischen 0 und y mit $F(x,y) = xyf_{yx}(\tilde{\xi}_{xy},\tilde{\eta}_{xy})$. Wegen $x \neq 0, y \neq 0$ folgt $f_{xy}(\xi_{xy},\eta_{xy}) = f_{yx}(\tilde{\xi}_{xy},\tilde{\eta}_{xy})$.
Sei nun $((x_n,y_n))$ konv. Folge in D mit GW $(0,0)$ und $x_n y_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.
Ab einem Index n_0 sind Folgen $((\xi_{x_n y_n},\eta_{x_n y_n}))$ und $((\tilde{\xi}_{x_n y_n},\tilde{\eta}_{x_n y_n}))$ wie oben def. und diese konv. gegen $(0,0)$ für $n \to \infty$. Da f_{xy}, f_{yx} stetig sind, folgt $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. ∎

11 Der Satz von Taylor

Bezeichnungen: Sei $p = (p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ (Multi-Index).

$$|p| := p_1 + \ldots + p_n;\ p! := p_1! \cdot p_2! \cdot \ldots \cdot p_n!\ .$$

Für $x = (\xi_1, \ldots, , \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $x^p := \xi_1^{p_1} \cdot \xi_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{p_n}$.

Bsp.: $|p| = 1 \Rightarrow \exists\, j \in \{1, \ldots, n\} : p = e_j$. Dann ist

$$x^p = \xi_j.$$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ ein Multi-Index und $f \in C^{|p|}(D, \mathbb{R}) = C^{p_1+\ldots+p_n}(D, \mathbb{R})$.

$$D^p f := D_1^{p_1} D_2^{p_2} \ldots D_n^{p_n} f = \frac{\partial^{|p|} f}{\partial \xi_1^{p_1} \partial \xi_2^{p_2} \ldots \partial \xi_n^{p_n}},\ (D^0 f := f).$$

Bsp.: $|p| = 1 \Rightarrow \exists\, j : D^p f = f_{\xi_j}$.

Satz 32 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(D, \mathbb{R})$. Weiter sei $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$, so daß $S(x, x+h) \subseteq D$. Es sei $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ def. durch $\phi(t) = f(x + th)$.*
Dann gilt: $\phi \in C^k([0,1], \mathbb{R})$ und

$$\phi^{(\nu)}(t) = \sum_{|p|=\nu} \frac{\nu!}{p!} (D^p f)(x + th) h^p \quad (\nu = 0, \ldots, k).$$

Beweis: $h = (h_1, \ldots, h_n)$.

$$\nu = 1 \ : \ \phi'(t) = (\text{grad } f(x + th)) \cdot h = \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(x + th) h_j$$
$$= \sum_{|p|=1} (D^p f)(x + th) h^p.$$

$$\nu = 2 \ : \ \phi''(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} (f_{\xi_j}(x + th)) h_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}((\mathrm{grad}\, f_{\xi_j}(x+th))\cdot h)h_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{\xi_j\xi_k}(x+th)h_k h_j$$
$$= \sum_{|p|=2} \frac{2}{p!}(D^p f)(x+th)h^p.$$

Es gilt allgemein

$$\phi^{(\nu)}(t) = \sum_{\mu_1=1}^{n}\sum_{\mu_2=1}^{n}\ldots\sum_{\mu_\nu=1}^{n} f_{\xi_{\mu_1}\ldots\xi_{\mu_\nu}}(x+th)h_{\mu_1}\ldots h_{\mu_\nu}.$$

Betr. ein ν-Tupel $(\mu_1,\ldots,\mu_\nu)$ $(1 \le \mu_j \le n)$.
Darin komme die 1 genau p_1-mal vor, die 2 komme genau p_2-mal vor, …, die Zahl n komme genau p_n-mal vor. Dann gilt:

$$f_{\xi_{\mu_1}\ldots\xi_{\mu_\nu}}(x+th)h_{\mu_1}\ldots h_{\mu_\nu} = (D_1^{p_1}\ldots D_n^{p_n} f)(x+th)h_1^{p_1}\ldots h_n^{p_n}.$$

Betr. alle solche ν-Tupel. Davon gibt es genau

$$\frac{\nu!}{p_1!\ldots p_n!} \text{ Stück. Bea.: } p_1+\ldots+p_n=\nu$$
$$\Rightarrow \phi^{(\nu)}(t) = \sum_{|p|=\nu}\frac{\nu!}{p!}(D^p f)(x+th)h^p. \quad \blacksquare$$

Bem.:

$$\binom{\nu}{p_1}\cdot\binom{\nu-p_1}{p_2}\cdot\ldots\cdot\binom{\nu-p_1-\ldots p_{n-1}}{p_n} = \frac{\nu!}{p_1!\ldots p_n!}.$$

Satz 33 *(Satz von Taylor): Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{k+1}(D,\mathbb{R})$, $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$ so, daß $S(x,x+h) \subseteq D$. Dann ex. ein $\theta \in [0,1]$ mit*

$$f(x+h) = \sum_{|p|\le k}\frac{(D^p f)(x)}{p!}h^p + \sum_{|p|=k+1}\frac{(D^p f)(x+\theta h)}{p!}h^p.$$

Bew.: Sei $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ def. durch $\phi(t) = f(x+th)$. $\phi \in C^{k+1}([0,1],\mathbb{R})$ und nach dem Satz von Taylor (in $\mathbb{R}$) gilt:
$\exists\, \theta \in [0,1]$:

$$f(x+h) = \phi(1) \;=\; \sum_{m=0}^{k} \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{\phi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}.$$

Es gilt:

$$\frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} = \sum_{|p|=m} \frac{(D^p f)(x)}{p!} h^p$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k} \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} &= \sum_{|p|\le k} \frac{(D^p f)(x)}{p!} h^p \;,\; \frac{\phi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} \\ &= \sum_{|p|=k+1} \frac{(D^p f)(x+\theta h)}{p!} h^p. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bsp.: $k=1$:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(x+\theta h) h_i h_j \\ &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}(h_1, \dots, h_n) \\ &\quad \begin{pmatrix} f_{\xi_1\xi_1}(x+\theta h) & \cdots & f_{\xi_1\xi_n}(x+\theta h) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\xi_n\xi_1}(x+\theta h) & \cdots & f_{\xi_n\xi_n}(x+\theta h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definition 20 *Sei $f \in C^2(D,\mathbb{R})$, $x_0 \in D$.*

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{\xi_1\xi_1}(x_0) & \cdots & f_{\xi_1\xi_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\xi_n\xi_1}(x_0) & \cdots & f_{\xi_n\xi_n}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_{\xi_1}(x_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_{\xi_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt Hesse-Matrix von f an der Stelle x_0.

Für $k = 1$, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ lautet der Satz von Taylor also:

Zu $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $S(x, x+h) \subseteq D$ ex. ein $\theta \in [0, 1]$ mit $f(x+h) = f(x) + (\operatorname{grad} f(x)) \cdot h + \frac{1}{2} h \cdot (H_f(x + \theta h)h)$.

Bem.: Wegen $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ist, nach dem Satz von Schwarz $H_f(x)$ stets symmetrisch ($x \in D$).

12 Extremwerte

Definition 21 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : M \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in M$ ein lokales Maximum (Minimum):* $\Leftrightarrow$

$$\exists\, \delta > 0 \forall x \in M \cap U_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

f hat in x_0 ein lokales Extremum: $\Leftrightarrow$ *f hat in x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.*

Satz 34 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f : D \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum und sei in x_0 partiell differenzierbar. Dann gilt:* $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

Bew.: $x_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Für ein $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist $\varphi(t) := f(\xi_1 + t, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert. φ hat in $t = 0$ ein lokales Extremum $\Rightarrow$

$$\varphi'(0) = f_{\xi_1}(x_0) = 0.$$

Analog $f_{\xi_j}(x_0) = 0$ $(j = 2, \ldots, n)$. ∎

Bem.: Aus $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$ folgt i.a. nicht, daß f in x_0 ein lokales Extremum besitzt.

Bsp.: $f(x, y) = xy,\ \operatorname{grad} f(x, y) = (y, x),\ f(0, 0) = 0$,
$\operatorname{grad} f(0, 0) = (0, 0)$ und für $x \neq 0$ gilt:

$$f(x, x) = x^2 > 0,\ f(x, -x) = -x^2 < 0.$$

Definition 22 *Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, also $a_{ij} = a_{ji}$. Die Abbildung $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ def. durch $Q_A(x) := x \cdot (Ax)$ heißt die zu A gehörende quadratische Form. Sie heißt*

$$\begin{aligned} positiv\ definit\ (pd): &\quad :\Leftrightarrow\ Q_A(x) > 0\ (x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \\ negativ\ definit\ (nd): &\quad :\Leftrightarrow\ Q_A(x) < 0\ (x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \\ indefinit\ (id): &\quad :\Leftrightarrow\ \exists\, u, v \in \mathbb{R}^n : \\ &\qquad\qquad Q_A(u) > 0 \wedge Q_A(v) < 0. \end{aligned}$$

Bem.: 1) Sei $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$Q_A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j .$$

Bsp.: $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix};\ Q_A(x,y) = ax^2 + bxy + byx + cy^2 \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 . \end{aligned}$$

Übung: $aQ_A(x,y) = (ax+by)^2 + (\det A)y^2$.

Damit gilt (bea: für 2×2-Matrizen):

$$\begin{aligned} A \text{ ist pd} &\Leftrightarrow a > 0 \wedge \det A > 0 \\ A \text{ ist nd} &\Leftrightarrow a < 0 \wedge \det A > 0 \\ A \text{ ist id} &\Leftrightarrow \det A < 0 . \end{aligned}$$

2.) Allgemein gilt (vgl. L.A.):
A pd $\Leftrightarrow$ alle EWe von A sind > 0.
A nd $\Leftrightarrow$ alle EWe von A sind < 0.
A id $\Leftrightarrow$ es ex. ein EW $\lambda < 0$ und ein EW $\mu > 0$ von A.

3.) A ist pd. $\Leftrightarrow -A$ ist nd.

4.) $Q_A(\alpha x) = (\alpha x) \cdot (A(\alpha x)) = \alpha^2 Q_A(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
5.) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetr. so gilt: $Q_{A+B} = Q_A + Q_B$.

Satz 35 *Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann gilt:*

1.) A ist pd (nd) $\Leftrightarrow$ $\exists\, c > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n : Q_A(x) \geq c\|x\|^2$ $(Q_A(x) \leq -c\|x\|^2)$.

2.) A sei pd (nd, id). Dann ex. ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt: Ist $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und gilt $|||A - B||| \leq \varepsilon$, so ist B pd (nd, id).

Zusatz: Ist A id, so gilt zusätzlich:
Es ex. $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $Q_B(u) > 0, Q_B(v) < 0$ für jede sym. Matrix B mit $|||A - B||| \leq \varepsilon$.

Bew.: 1.) "$\Leftarrow$" klar. "$\Rightarrow$" Sei A pd. Die Menge $K := \{x : ||x|| = 1\}$ ist kompakt und $Q_A : K \to \mathbb{R}$ ist stetig.

$$\Rightarrow \ \exists\, x_0 \in K\ \forall z \in K : 0 < c := Q_A(x_0) \leq Q_A(z).$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$ und $z = \frac{x}{\|x\|}$. Es gilt

$$Q_A(z) = Q_A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|^2} Q_A(x)$$

und somit

$$Q_A(x) \geq c\|x\|^2. \ \text{(nd analog).} \quad \blacksquare$$

2.) Sei A pd. $\Rightarrow\ \exists\, c > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}^n : Q_A(x) \geq c\|x\|^2$.
Setze $\varepsilon := \frac{c}{2}$. Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $|||A - B||| \leq \varepsilon$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} |Q_{B-A}(x)| &= |x \cdot ((B-A)x)| \leq \|x\|\, \|(B-A)x\| \\ &\leq |||B - A|||\, \|x\|^2 \leq \frac{c}{2}\|x\|^2 \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

und daher für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$Q_B(x) = Q_A(x) + Q_{B-A}(x) \geq c\|x\|^2 - \frac{c}{2}\|x\|^2 = \frac{c}{2}\|x\|^2$$
$$\Rightarrow B \text{ ist pd (nd analog).}$$

Sei A id $\Rightarrow\ \exists\, u, v \in \mathbb{R}^n : Q_A(u) > 0 \wedge Q_A(v) < 0$.
Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}\min\left\{\frac{Q_A(u)}{\|u\|^2},\ -\frac{Q_A(v)}{\|v\|^2}\right\}$. Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symm. und $|||A - B||| \leq \varepsilon$. Dann gilt (vgl. 1.))

$$Q_A(u) - Q_B(u) \leq \varepsilon\|u\|^2 \leq \frac{1}{2}Q_A(u)$$
$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{2}Q_A(u) \leq Q_B(u). \ \ (Q_B(v) < 0 \text{ analog}). \quad \blacksquare$$

Satz 36 *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $x_0 \in D$ mit grad $f\ (x_0) = 0$. Dann gilt:*

1.) $H_f(x_0)$ ist pd $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Minimum.

2.) $H_f(x_0)$ ist nd $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Maximum.

3.) $H_f(x_0)$ ist id $\Rightarrow$ f hat in x_0 **kein** *lokales Extremum.*

Bem.: $H_f(x_0)$ id kann im Fall $n = 1$ nicht auftreten. Es gibt keine indefiniten 1×1-Matrizen.

Bew.: Da $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ist $H_f : D \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Setze $A := H_f(x_0)$. Sei ε zu A wie in Satz 35. Es existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $|||H_f(x) - A||| \leq \varepsilon$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Sei $x \in U_\delta(x_0)$ und $h := x - x_0$ ($\Rightarrow x = x_0 + h$). Nach dem Satz von Taylor existiert $\theta \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + h) = f(x_0) + (\text{grad } f(x_0)) \cdot h \\ &\qquad + \frac{1}{2} h \cdot (H_f(x_0 + \theta h)h) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} Q_{H_f(x_0 + \theta h)}(h). \end{aligned}$$

Sei A pd (nd analog): Wegen $x_0 + \theta h \in U_\delta(x_0)$ ist $H_f(x_0 + \theta h)$ pd. Somit gilt: $\forall\, x \in U_\delta(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$.
$\Rightarrow$ f hat in x_0 ein lok. Minimum.

Sei A id.: $\exists\, u, v \in \mathbb{R}^n\ \forall\, x \in U_\delta(x_0) : Q_{H_f(x)}(u) > 0 \wedge Q_{H_f(x)}(v) < 0$.

Sei $0 < |\lambda|$ hinreichend klein, so daß $x_0 + \lambda u,\ x_0 + \lambda v \in U_\delta(x_0)$.

Betr. $x = x_0 + \lambda u$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{2} Q_{H_f(x_0 + \theta\lambda u)}(\lambda u) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} \lambda^2 Q_{H_f(x_0 + \theta\lambda u)}(u) > f(x_0). \end{aligned}$$

Analog gilt für $x = x_0 + \lambda v : f(x) < f(x_0)$.

Also gilt für $0 < |\lambda|$ hinreichend klein: $f(x_0 + \lambda u) > f(x_0)$ und $f(x_0 + \lambda v) < f(x_0)$. Somit ist x_0 keine Extremalstelle. ■

Bem.: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix mit $Q_A(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ (bzw. $Q_A(x) \leq 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$), so nennt man A positiv (bzw. negativ) semidefinit.

Aus $f \in C^2(D, \mathbb{R}),\ x_0 \in D$ mit $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ semidefinit folgt **nicht**, daß x_0 eine Extremalstelle ist. Unter diesen Voraussetzungen kommen alle möglichen Fälle vor (bereits im Fall $n = 1$: $f(x) = x^4,\ f(x) = -x^4,\ f(x) = x^3$ $(x_0 = 0)$).

Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = (x + y)^3 - 6xy$.

$$f'(x, y) = (3(x + y)^2 - 6y,\ 3(x + y)^2 - 6x) = (0, 0) \Leftrightarrow$$
$$(x + y)^2 = 2y = 2x \Leftrightarrow x = y \wedge 4x^2 = 2x$$
$$\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Stationäre Punkte: $(0, 0)$ und $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x + y) & 6(x + y) - 6 \\ 6(x + y) - 6 & 6(x + y) \end{pmatrix}$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(0, 0) = -36 < 0.$$

$\Rightarrow H_f(0, 0)$ ist indefinit $\Rightarrow (0, 0)$ ist keine Extremalstelle von f.

$$H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ist pd $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ist lokale Minimalstelle von f.