# 13 Extremwerte unter Nebenbedingungen

Bsp.: Eine Schachtel aus dünnem Material und Kantenlängen $a, b, c > 0$, aber ohne Deckel soll bei vorgegebenem Volumen $v_0$ so dimensioniert werden, daß möglichst wenig Material verbraucht wird. Dies führt auf die Aufgabe:

Minimiere $ab + 2ac + 2bc$ unter der "Nebenbedingung" $abc = v_0$.

In diesem Paragraphen sei stets $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, $T = \{x \in D : \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset$.

**Definition 22** *$f$ hat in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum (Minimum) unter der Nebenbedingung (NB) $\varphi = 0 :\Leftrightarrow x_0 \in T$ und es existiert $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq D$ und*

$$f(x) \leq (\geq) f(x_0) \quad \text{für alle } x \in T \cap U_\delta(x_0).$$

D.h. $f$ hat in $x_0$ ein lok. Extremum unter der NB $\varphi = 0$ genau dann wenn $f : T \to \mathbb{R}$ in $x_0$ ein lok. Extremum besitzt.

Hilfsfunktion: Sei $H : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$H(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot \varphi(x) = f(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x).$$

Bem.: $D \times \mathbb{R}^m$ ist offene TM des $\mathbb{R}^{n+m}$.

Es gilt: $H'(x, \lambda) = \text{grad } H(x, \lambda) = (f'(x) + \lambda \cdot \varphi'(x), \varphi(x))$ $(1 \times (n + m)$-Matrix).

D.h.: Für $x_0 \in D$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ ($\lambda_0 = (\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$) gilt:

$$H'(x_0, \lambda_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0 \ \wedge \ x_0 \in T \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&H_{x_1}(x_0, \lambda_0) = f_{x_1}(x_0) + \lambda_1^{(0)}(\varphi_1)_{x_1}(x_0) + \ldots + \lambda_m^{(0)}(\varphi_m)_{x_1}(x_0) = 0 \\
&\vdots \\
&H_{x_n}(x_0, \lambda_0) = f_{x_n}(x_0) + \lambda_1^{(0)}(\varphi_1)_{x_n}(x_0) + \ldots + \lambda_m^{(0)}(\varphi_m)_{x_n}(x_0) = 0 \\
&H_{\lambda_1}(x_0, \lambda_0) = \varphi_1(x_0) = 0 \\
&\qquad \vdots \\
&H_{\lambda_m}(x_0, \lambda_0) = \varphi_m(x_0) = 0
\end{aligned}$$

**Satz 37** *(Multiplikatorenregel von Lagrange)*
*Es gelte $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $f$ habe in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum (Max. oder Min.) unter der NB $\varphi = 0$ und es sei Rang $\varphi'(x_0) = m$. Dann existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $H'(x_0, \lambda_0) = 0$.*

Beweis: Für $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in D$ schreiben wir

$$x = (w, z) \text{ mit } w = (\xi_1, \ldots, \xi_m),\ z = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n) \qquad (\text{bea.}:\ m < n).$$

Also: $x_0 = (w_0, z_0)$. Es gilt: $0 = \varphi(x_0) = \varphi(w_0, z_0)$ und $\varphi'(x_0) =$

$$\begin{pmatrix} (D_1\varphi_1)(x_0) \ldots (D_m\varphi_1)(x_0) & (D_{m+1}\varphi_1)(x_0) \ldots (D_n\varphi_1)(x_0) \\ \vdots & \\ (D_1\varphi_m)(x_0) \ldots (D_m\varphi_m)(x_0) & (D_{m+1}\varphi_m)(x_0) \ldots (D_n\varphi_m)(x_0) \end{pmatrix}$$

$=: (A_w\ A_z)$. Nach Vor. ist Rang $\varphi'(x_0) = m$. O.B.d.A. seien die ersten $m$ Spalten linear unabhängig, d.h. $A_w$ invertierbar. Nach dem Satz über impl. def. Funktionen existiert eine offene Umgebung $\widetilde{U}$ von $z_0$ und eine Funktion $g \in C^1(\widetilde{U}, \mathbb{R}^m)$ mit $g(z_0) = w_0$, $(g(z), z) \subseteq D$ $(z \in \widetilde{U})$ und $\varphi(g(z), z) = 0$ $(z \in \widetilde{U})$.

Sei $h(z) := f(g(z), z)$ $(z \in \widetilde{U})$.

Dann hat $h$ in $z_0$ ein lokales Extremum (ohne NB).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad 0 = h'(z_0) &= f'(g(z_0), z_0) \cdot \begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} \\
&= f'(w_0, z_0) \begin{pmatrix} g'(z_0) \\ I \end{pmatrix} \\
&= -\left((D_1 f)(x_0), \ldots, (D_m f)(x_0)\right) A_w^{-1} A_z \\
&\qquad + \left((D_{m+1} f)(x_0), \ldots, (D_n f)(x_0)\right).
\end{aligned}$$

Setze $\lambda_0 := -\left((D_1 f)(x_0), \ldots, (D_m f)(x_0)\right) A_w^{-1} \quad (\in \mathbb{R}^m)$.

Dann gilt
1.) $0 = \left((D_{m+1} f)(x_0), \ldots, (D_n f)(x_0)\right) + \lambda_0 A_z$,

und nach Def. von $\lambda_0$ gilt
2.) $0 = \left((D_1 f)(x_0), \ldots, (D_m f)(x_0)\right) + \lambda_0 A_w$.

Insgesamt gilt also

$$f'(x_0) + \lambda_0 (A_w \ A_z) = f'(x_0) + \lambda_0 \varphi'(x_0) = 0. \qquad \blacksquare$$

Bsp.: Sei $D = (0, \infty)^3$, $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ und $\varphi : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(x, y, z) = xyz - v_0$ (also $m = 1$). Sei $v_0 := 32$.

Dann ist $H(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - v_0)$.

Es gilt: Rang $\varphi'(x, y, z) =$ Rang $(yz, xz, xy) = 1$ $((x, y, z) \in D)$.

$H'(x, y, z, \lambda)$
$= (y + 2z + \lambda yz, x + 2z + \lambda xz, 2x + 2y + \lambda xy, xyz - v_0) = 0$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad & xy + 2zx + \lambda v_0 = 0 \ \wedge \ xy + 2yz + \lambda v_0 = 0 \ \wedge \\
& 2xz + 2yz + \lambda v_0 = 0 \ \wedge \ xyz = v_0 \\
\Leftrightarrow \qquad & 2z(x - y) = 0 \ \wedge \ yx + 2yz + \lambda v_0 = 0 \ \wedge
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& x(2z-y)=0 \;\wedge\; xyz=v_0 \\
\Leftrightarrow\quad & x=y=2z \;\wedge\; 4z^2+4z^2+\lambda v_0=0 \;\wedge\; 4z^3=v_0 \\
\Leftrightarrow\quad & x=y=2z=4 \;\wedge\; 32+\lambda 32=0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x,y,z)=(4,4,2) \;\wedge\; \lambda=-1.
\end{aligned}
$$

Somit gilt: $(4,4,2)$ ist die einzige Stelle, an der ein Extremum von $f$ unter der NB $\varphi=0$ vorliegen könnte.

Will man wissen, ob tatsächlich ein solches Extremum vorliegt, muß das Problem näher untersucht werden.

Es gilt $f(4,4,2)=16+2\cdot 8+2\cdot 8=48$.

Betr. die kompakte Menge $K=\{(x,y,z)\in D:\varphi(x,y,z)=0 \;\wedge\; x\le r,\; y\le r,\; z\le r\}\subseteq T$ mit $r=128$.

Sei $(x,y,z)\in T\backslash K \Rightarrow x>r \vee y>r \vee z>r$.

1. Fall: $x>r \Rightarrow yz=\frac{32}{x}<\frac{32}{128}=\frac{1}{4}\Rightarrow y<\frac{1}{2}\vee z<\frac{1}{2}$.
Es gilt: $f(x,y,z)=\frac{32}{z}+\frac{64}{y}+2yz>\frac{32}{z}+\frac{64}{y}>64$.

2. Fall: $y>r\Rightarrow xz<\frac{1}{4}\Rightarrow x<\frac{1}{2}\vee z<\frac{1}{2}$.
Es gilt: $f(x,y,z)>\frac{32}{z}+\frac{64}{x}>64$.
3. Fall: $z>r$ analog $f(x,y,z)>64$.

Da $K$ kompakt ist, existiert $\min f(K)$. Wegen obiger Rechnung existiert $\min f(T)$ und ist gleich $\min f(K)$.

Damit besitzt $f$ eine (sogar globale) Minimalstelle unter der NB $\varphi=0$. $(4,4,2)$ ist die einzige Stelle, die dafür in Frage kommt. Somit gilt:

$$\min f(T)=f(4,4,2)=48.$$

# 14 Wege

**Definition 23** *Eine stetige Abbildung* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $([a,b] \subseteq \mathbb{R})$ *heißt ein Weg. Sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *ein Weg.* $\Gamma := \Gamma_\gamma := \gamma([a,b])$ $(\subseteq \mathbb{R}^n)$ *heißt der zum Weg* $\gamma$ *gehörende Bogen.*

Da $[a,b]$ kompakt und $\gamma$ stetig ist, gilt (vgl. Satz 16):
$\Gamma$ ist kompakt.

$\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt von $\gamma$.
$\gamma(b)$ heißt Endpunkt von $\gamma$.
$[a,b]$ heißt das Parameterintervall von $\gamma$.

$\gamma$ ist "orientiert". $\gamma(t_1)$ "kommt vor" $\gamma(t_2)$, wenn $t_1 < t_2$.

Inverser Weg: $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ $(t \in [a,b])$. Es gilt: $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma^-}$.

Bsp.: 1.) $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n,\ \gamma(t) := x_0 + t(y_0 - x_0)$ $(t \in [0,1])$.
Es gilt: $\Gamma = S(x_0, y_0),\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma(1) = y_0$.

2.) Sei $r > 0,\ \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$.
Es gilt: $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\},\ \gamma(0) = \gamma(2\pi) = (r, 0)$.

3.) Sei $r, \gamma$ wie in 2.) und $\tilde{\gamma}(t) = (r\cos t, r\sin t)$ $(t \in [0, 4\pi])$.
Es gilt: $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\tilde{\gamma}}$.

4.) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\gamma(t) = (t, f(t))$ $(t \in [a,b])$.
Es gilt: $\Gamma = \{(t, f(t)) : t \in [a,b]\}$. ($\Gamma$ ist der Graph von $f$).

5.) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $(t \in [0,b])$ mit $b > 0$.
Anschauung: "Schraubenlinie".

**Definition 24** *Sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *ein Weg und* $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ *eine Zerlegung von* $[a,b]$.

$$L(\gamma, Z) := \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|.$$

*($L(\gamma, Z)$ ist die "Länge" des Streckenzuges durch die Punkte $\gamma(t_0)$, ..., $\gamma(t_m)$).*
*$\gamma$ heißt rektifizierbar (rb): $\Leftrightarrow\ \exists\, M \geq 0\, \forall$ Zerl. von $[a, b]$:*

$$L(\gamma, Z) \leq M.$$

*In diesem Fall heißt*

$$L(\gamma) := \sup\{L(\gamma, Z) : Z \text{ ist Zerleg. von } [a, b]\}$$

*die Länge des Weges $\gamma$.*

Übung: $Z, \widetilde{Z}$ Zerl. von $[a, b]$, $Z \subseteq \widetilde{Z} \Rightarrow L(\gamma, Z) \leq L(\gamma, \widetilde{Z})$.

**Satz 38** *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. (Beachte: $\gamma_j \in C([a, b], \mathbb{R})$ $(j = 1, \ldots, n)$). Dann gilt:*

$$\gamma \text{ ist rb } \Leftrightarrow \gamma_j \in BV([a, b], \mathbb{R})\ (j = 1, \ldots, n).$$

Bew.: Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. $\|.\|$ ist die Euklidnorm. Daher gilt:

$$\begin{aligned} |\gamma_{j_0}(t_k) - \gamma_{j_0}(t_{k-1})| &\leq \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} |\gamma_{j_0}(t_k) - \gamma_{j_0}(t_{k-1})| &\leq \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{\gamma_{j_0}}(Z) \leq L(\gamma, Z) \leq \sum_{j=1}^{n} V_{\gamma_j}(Z).$$

Damit gilt: Ist $\gamma$ rb, so ist $V_{\gamma_{j_0}}(Z) \leq L(\gamma)$. Somit ist $\gamma_{j_0} \in BV([a, b], \mathbb{R})$ $(j_0 = 1, \ldots, n)$. Sind alle $\gamma_j \in BV([a, b], \mathbb{R})$ so gilt $L(\gamma, Z) \leq \sum_{j=1}^{n} V_{\gamma_j}([a, b]) \Rightarrow \gamma$ ist rb. ■

Bem.: Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rber Weg, so folgt (aus Satz 38 und den Eigenschaften von Fkt. von beschr. Variation) daß für $[c,d] \subseteq [a,b]$ auch $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^n,\ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ ein rber Weg ist.
Bem.: $\tilde{\gamma} = \gamma_{|[c,d]}$.

Bsp.: 1.) $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n,\ \gamma(t) = x_0 + t(y_0 - x_0)\ (t \in [0,1])$.
Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerl. von $[a,b]$.

$$\begin{aligned} L(\gamma, Z) &= \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1})\|y_0 - x_0\| = \|y_0 - x_0\|. \end{aligned}$$

Somit ist $\gamma$ rb und $L(\gamma) = \|y_0 - x_0\|$.

2.) Übung: Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rber Weg, so ist $\gamma^-$ ein rber Weg und $L(\gamma) = L(\gamma^-)$.

3.) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t \cos \frac{\pi}{t}, t^2) & , \ t \in (0,1] \\ (0,0) & , \ t = 0. \end{cases}$$

Dann ist $\gamma$ ein Weg, aber nicht rb, da die erste Komponentenfkt. nicht von beschr. Variation ist.

**Definition 25** *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rber Weg. Dann heißt*

$$s(t) := \begin{cases} L(\gamma_{|[a,t]}) & , \ t \in (a,b] \\ 0 & , \ t = a. \end{cases}$$

*Weglängenfunktion von $\gamma$ (bea.: $s(b) = L(\gamma)$).*

Analog wie bei Fkt. von beschr. Variation zeigt man, daß $s$ auf $[a,b]$ monoton wächst und $s(t_2) - s(t_1) = L(\gamma_{|[t_1,t_2]})$ $(a \le t_1 < t_2 \le b)$ gilt. (Später zeigen wir: $s \in C([a,b], \mathbb{R})$.)

**Definition 26** *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$.*

$$\int_a^b \gamma(t)dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t)dt, \ldots, \int_a^b \gamma_n(t)dt\right).$$

**Satz 39** *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Es gilt*

$$\left\|\int_a^b \gamma(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|dt.$$

Bew.: Klar, falls $\int_a^b \gamma(t)dt = 0$.

Sei dies nicht der Fall und $z = \int_a^b \gamma(t)dt \;/\; \|\int_a^b \gamma(t)dt\|$.
Dann gilt (vgl. CSU):

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b \gamma(t)dt\right\| &= z \cdot \int_a^b \gamma(t)dt = \int_a^b z \cdot \gamma(t)dt \\ &\leq \int_a^b \|z\|\;\|\gamma(t)\|dt = \int_a^b \|\gamma(t)\|dt. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

**Satz 40** *Sei $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Dann gilt:*

*1.) $\gamma$ ist rb.*

*2.) $s \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ und $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$.*

*3.) $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$. (Also insbes.: $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|d\tau$ $(t \in [a,b])$.)*

Bew.: 1.) $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n) \Rightarrow \gamma_j \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ $(j = 1, \ldots, n)$.
$\Rightarrow \gamma_j \in BV([a,b], \mathbb{R})$ $(j = 1, \ldots, n)$. Somit ist $\gamma$ rb.

2.) Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ Zerl. von $[a,b]$.
$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)dt\right\| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\|dt$ $(k = 1, \ldots, m)$

$\Rightarrow L(\gamma, Z) \leq \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|dt$. Somit gilt $L(\gamma) \leq \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|dt$.

Sei nun $t_0 \in [a,b)$ fest und $\sigma \in (t_0, b]$. $\gamma_\sigma := \gamma_{|[t_0,\sigma]}$.
Es gilt: $L(\gamma_\sigma) \leq \int\limits_{t_0}^{\sigma} \|\gamma'(t)\|dt$. $\widetilde{Z} = \{t_0, \sigma\}$ ist eine Zerl. von $[t_0, \sigma]$.

Damit gilt: $\|\gamma(t_0) - \gamma(\sigma)\| = L(\gamma_\sigma, \widetilde{Z}) \leq L(\gamma_\sigma) \leq \int\limits_{t_0}^{\sigma} \|\gamma'(t)\|dt$.

Weiter gilt $s(\sigma) - s(t_0) = L(\gamma_\sigma)$ und daher:

$$\underbrace{\left\|\frac{\gamma(\sigma) - \gamma(t_0)}{\sigma - t_0}\right\|}_{\substack{\downarrow\ \sigma \to t_0+ \\ \|\gamma'(t_0)\|}} \leq \frac{s(\sigma) - s(t_0)}{\sigma - t_0} \leq \underbrace{\frac{1}{\sigma - t_0} \int\limits_{t_0}^{\sigma} \|\gamma'(t)\|dt}_{\substack{\downarrow\ \sigma \to t_0+ \\ \|\gamma'(t_0)\|}}.$$

Fazit: $s$ ist in jedem $t_0 \in [a,b)$ rechtsseitig db und

$$\lim_{\sigma \to t_0+} \frac{s(\sigma) - s(t_0)}{\sigma - t_0} = \|\gamma'(t_0)\|.$$

Analog

$$\lim_{\sigma \to t_0-} \frac{s(\sigma) - s(t_0)}{\sigma - t_0} = \|\gamma'(t_0)\| \quad (t_0 \in (a,b]).$$

Damit gilt 2.).

3.) $L(\gamma) = s(b) = s(b) - s(a) = \int\limits_a^b s'(t)dt = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|dt$. $\blacksquare$

Bsp.: 1.) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$.

$$s(t) = \int\limits_0^t \|\gamma'(\tau)\|d\tau = \int\limits_0^t \|(-\sin\tau, \cos\tau)\|d\tau = \int\limits_0^t 1 d\tau = t$$

$\Rightarrow L(\gamma) = s(2\pi) = 2\pi$.

2.) Sei $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ und $\gamma(t) = (t, f(t))$ $(t \in [a,b])$.

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b \|(1, f'(t))\|dt = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt.$$

**Definition 27** *Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt stückweise stetig db $:\Leftrightarrow$ Es existiert eine Zerlegung $\{t_0, \ldots, t_m\}$ von $[a,b]$ mit $\gamma_k := \gamma_{|[t_{k-1},t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n)$ $(k = 1, \ldots, m)$.*

Bsp.: $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, |t|)$ ist stückweise stetig db. (Wähle als Zerlegung $\{-1, 0, 1\}$.)

Übung: Stückweise stetig db Wege sind rb und

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{m} L(\gamma_k) = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Parametertransformation:

**Definition 28** *Seien $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ Wege. $\gamma_1 \sim \gamma_2 :\Leftrightarrow$ Es existiert eine stetige bijektive wachsende Funktion $h : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ mit $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$.*

Bem.: 1.) Die Eigenschaften von $h$ implizieren $h$ streng wachsend, $h(a) = \alpha$, $h(b) = \beta$.

2.) Ist $\gamma_1 \sim \gamma_2$, so ist $\Gamma_{\gamma_1} = \Gamma_{\gamma_2}$.

3.) Übung: "$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation.

4.) $h$ heißt eine Parametertransformation.

5.) $h$ streng wachsend bedeutet: $\gamma_1$ und $\gamma_2$ haben dieselbe "Orientierung".

Bsp.: $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_1(t) = x_0 + t^2(y_0 - x_0)$ $(t \in [0,1])$,
$\gamma_2(t) = x_0 + t(y_0 - x_0)$ $(t \in [0,1])$.
Hier ist $\gamma_1 \sim \gamma_2$, denn $h : [0,1] \to [0,1]$, $h(t) = t^2$ ist stetig, bijektiv, wachsend und $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$.

**Definition 29** *Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt glatt $:\Leftrightarrow$ $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ und $\gamma'(t) \neq 0$ $(t \in [a,b])$.*

**Satz 41** *$\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ seien Wege, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ und $h : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ eine Parametertransformation (also $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$).*
*Dann gilt:*

*1.) $\gamma_1$ ist rb $\Leftrightarrow$ $\gamma_2$ ist rb. In diesem Fall gilt $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.*

*2.) Sind $\gamma_1$ und $\gamma_2$ glatt, so gilt $h \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ und $h'(t) > 0 \quad (t \in [a,b])$.*

Bew.: 1.) Sei $\gamma_2$ rb und $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann ist $\widetilde{Z} = \{h(t_0), \ldots, h(t_m)\}$ Zerlegung von $[\alpha,\beta]$ und $L(\gamma_1, Z) = \sum\limits_{k=1}^{m} \|\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})\| = \sum\limits_{k=1}^{m} \|\gamma_2(h(t_k)) - \gamma_2(h(t_{k-1}))\|$ $= L(\gamma_2, \widetilde{Z}) \leq L(\gamma_2)$.

Damit ist $\gamma_1$ rb und $L(\gamma_1) \leq L(\gamma_2)$.

Genauso: Aus $\gamma_1$ ist rb folgt: $\gamma_2$ ist rb und $L(\gamma_2) \leq L(\gamma_1)$.

2.) Sei $\gamma_1 = (f_1, \ldots, f_n),\ \gamma_2 = (g_1, \ldots, g_n)$. Sei $t_0 \in [a,b]$ und $t \neq t_0$.

$\gamma_2'(h(t_0)) \neq 0 \Rightarrow\ \exists\, j \in \{1, \ldots, n\} :\ g_j'(h(t_0)) \neq 0.$

Damit gilt:

$$\frac{f_j(t) - f_j(t_0)}{t - t_0} = \frac{g_j(h(t)) - g_j(h(t_0))}{h(t) - h(t_0)} \cdot \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \to \frac{f_j'(t_0)}{g_j'(h(t_0))} \quad (t \to t_0).$$

Somit ist (da $t_0 \in [a,b]$ bel.) $h$ db auf $[a,b]$.

Aus $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t)) \quad (t \in [a,b])$ folgt $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(h(t))h'(t)$ $(t \in [a,b])$. Da $\gamma_1, \gamma_2$ glatt folgt $h'(t) \neq 0$ $(t \in [a,b])$, und wegen $h$ wachsend gilt somit $h'(t) > 0$ $(t \in [a,b])$.

Damit folgt

$$h'(t) = \frac{\|\gamma_1'(t)\|}{\|\gamma_2'(h(t))\|} \quad (t \in [a,b]).$$

Also ist $h'$ stetig auf $[a,b]$. $\blacksquare$

**Satz 42** *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rber Weg und $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ die zugehörige Weglängenfunktion, dann ist $s$ wachsend und stetig auf $[a,b]$.*

Bew.: $s$ wachsend (bekannt). Sei $t_0 \in (a,b]$. Wir zeigen $s(t) \to s(t_0)$ $(t \to t_0-)$. (Analog zeigt man $s(t) \to s(t_0)$ $(t \to t_0+)$ für $t_0 \in [a,b)$.)

Sei $\varepsilon > 0$. $\gamma$ ist gleichmäßig stetig auf $[a,b]$. Somit gilt:

$$\exists\, \delta > 0\; \forall\, t_1, t_2 \in [a,b] : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| < \varepsilon.$$

Es existiert eine Zerl. $Z$ von $[a,b]$ mit $0 \le L(\gamma) - L(\gamma, Z) < \varepsilon$. Sei $\widetilde{Z} = \{\tau_0, \ldots, \tau_m\}$ eine Zerl. von $[a,b]$ mit $Z \subseteq \widetilde{Z}$, $|\widetilde{Z}| < \delta$ und $t_0 \in \widetilde{Z}$.

Es gilt $L(\gamma, Z) \le L(\gamma, \widetilde{Z})$ und somit $0 \le L(\gamma) - L(\gamma, \widetilde{Z}) < \varepsilon$.

Es sei $\gamma_j := \gamma_{|[\tau_{j-1},\tau_j]}$ und $\alpha_j := \|\gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1})\|$ $(j = 1, \ldots m)$. Dann gilt: $\alpha_j < \varepsilon$, $\alpha_j \le L(\gamma_j)$ und $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_m)$.

Weiter ist $s(\tau_j) - s(\tau_{j-1}) = L(\gamma_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$.
$a \ne t_0 \in \widetilde{Z} \Rightarrow\ \exists\, k \ge 1 : t_0 = \tau_k$.
Es gilt somit:

$$\begin{aligned}
&s(t_0) - s(\tau_{k-1}) = L(\gamma_k) \Rightarrow \\
&s(t_0) - s(\tau_{k-1}) - \alpha_k = L(\gamma_k) - \alpha_k \le \sum_{j=1}^{m} (L(\gamma_j) - \alpha_j) \\
&= L(\gamma) - L(\gamma, \widetilde{Z}) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit folgt $s(t_0) - s(\tau_{k-1}) < \varepsilon + \alpha_k < 2\varepsilon$.

Setze $\widetilde{\delta} = t_0 - \tau_{k-1} \leq |\widetilde{Z}| < \delta$. Für $t \in (t_0 - \widetilde{\delta}, t_0) = (\tau_{k-1}, \tau_k)$ gilt $t > \tau_{k-1}$ und somit ($s$ wachsend) $s(t) \geq s(\tau_{k-1})$.

$$\Rightarrow |s(t_0) - s(t)| = s(t_0) - s(t) \leq s(t_0) - s(\tau_{k-1}) < 2\varepsilon.$$

Also: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \widetilde{\delta} > 0 : t \in (t_0 - \widetilde{\delta}, t_0) \Rightarrow |s(t_0) - s(t)| < 2\varepsilon$.

D.h. $s(t) \to s(t_0)\ \ (t \to t_0-)$. ■

Die Weglänge als Parameter:

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rber Weg und $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ die zugehörige Weglängenfunktion. Es gilt: $s$ wachsend, $s \in C([a,b], \mathbb{R})$, $s(a) = 0$ $s(b) = L(\gamma)$. Somit folgt $s([a,b]) = [0, L(\gamma)]$.

Nun sei $s$ streng wachsend auf $[a,b]$. (Dies ist z.B. der Fall, wenn $\gamma$ injektiv auf $[a,b)$ ist (Übung), oder wenn $\gamma$ glatt ist, dann ist $s \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ und $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ $(t \in [a,b])$.)

In diesem Fall ist $s : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$ bijektiv.
Sei $\sigma := s^{-1} : [0, L(\gamma)] \to [a,b]$. $\sigma$ ist streng wachsend und stetig auf $[0, L(\gamma)]$, $\sigma(0) = a,\ \sigma(L(\gamma)) = b$. Setze

$$\widetilde{\gamma}(t) := \gamma(\sigma(t)) \quad (t \in [0, L(\gamma)]).$$

Dann gilt $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$. $\widetilde{\gamma}$ heißt Parameterdarstellung von $\Gamma = \Gamma_\gamma$ mit der Weglänge als Parameter. Man schreibt auch

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\sigma(s)) \quad (s \in [0, L(\gamma)]).$$

Sei $\varphi : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}$ die Weglängenfunktion von $\widetilde{\gamma}$ und sei $\tau \in [0, L(\gamma)] = s([a,b])$. Dann existiert genau ein $t \in [a,b]$ mit $s(t) = \tau$ und es gilt: $\sigma([0,\tau]) = s^{-1}([0, s(t)]) = [a,t]$.
Damit ist $\varphi(\tau) = L(\widetilde{\gamma}|_{[0,\tau]}) = L(\gamma \circ \sigma|_{[0,\tau]}) = L(\gamma|_{[a,t]}) = s(t) = \tau$.
Also: $\varphi(t) = t \quad (t \in [0, L(\gamma)])$.

**Satz 43** *Sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *ein glatter Weg und* $\tilde{\gamma}$ *die Parameterdarstellung von* $\Gamma_\gamma$ *mit der Weglänge als Parameter.*
*Dann gilt:* $\tilde{\gamma}$ *ist glatt und* $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1 \quad (t \in [0, L(\gamma)])$.

Beweis: Es ist $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ mit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$. Wegen $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \quad (t \in [a,b])$ gilt $\sigma \in C^1([0, L(\gamma)], \mathbb{R})$. Somit ist

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \gamma \circ \sigma \in C^1([0, L(\gamma)], \mathbb{R}^n) \quad \text{und} \\ \tilde{\gamma}'(t) &= \gamma'(\sigma(t))\sigma'(t) \\ &= \gamma'(\sigma(t)) \cdot \frac{1}{s'(\sigma(t))} \quad (t \in [0, L(\gamma)]). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\|\gamma'(t)\| = \frac{\|\gamma'(\sigma(t))\|}{s'(\sigma(t))} = 1 \quad (t \in [0, L(\gamma)]). \qquad \blacksquare$$

Bem.: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg. $\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)$ ist anschaulich der Vektor, der $\gamma(t_0)$ und $\gamma(t_0 + h)$ verbindet. $\gamma'(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h}$ heißt Tangentenvektor $(t_0 \in [a,b])$.
Tangente: Gerade $x = \gamma(t_0) + \mu\gamma'(t_0)$ $(\mu \in \mathbb{R})$.

Ist $\tilde{\gamma}$ ebenfalls glatt und $\tilde{\gamma} \sim \gamma$, also $\gamma = \tilde{\gamma} \circ h$ ($h$ Parametertransformation), so ist $h \in C^1$ und $\gamma'(t_0) = \tilde{\gamma}'(h(t_0))h'(t_0)$.
Also gilt $\gamma'(t_0) = c\tilde{\gamma}'(h(t_0))$ mit $c = h'(t_0) > 0$. D.h. der Tangentenvektor ändert eventuell seine Länge, aber nicht die Richtung.

Im Fall $n = 2$ $(\gamma = (\gamma_1, \gamma_2))$ steht der Vektor $u = (-\gamma_2'(t_0), \gamma_1'(t_0))$ senkrecht auf $\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))$ und heißt ein positiver Normalenvektor.

# 15 Wegintegrale

**Definition 30** *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rber Weg und*

$$f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}^n \text{ stetig}, \quad \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \; f = (f_1, \ldots, f_n).$$

*(Dann ist $\gamma_j \in BV([a,b], \mathbb{R})$, $f_j \in C(\Gamma_\gamma, \mathbb{R})$ $(j = 1, \ldots, n)$, und damit ist $f_j \circ \gamma \in R_{\gamma_j}([a,b], \mathbb{R})$ $(j = 1, \ldots, n)$.)*

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x) \cdot dx &:= \int_\gamma (f_1(x) d\xi_1 + \ldots + f_n(x) d\xi_n) \\ &:= \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t) \quad (\in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

*heißt Wegintegral von $f$ längs $\gamma$.*
*Desweiteren definiert man $\int_\gamma f_j(x) d\xi_j := \int_a^b f_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t)$.*

Weitere Schreibweisen:

$$\int_\gamma f(x) dx, \; \sum_{j=1}^n \int_\gamma f_j(x) d\xi_j.$$

Bsp.: $\gamma(t) = (t, t^2, t)$ $(t \in [0,1])$, $f(x,y,z) = (z,y,x)$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.

$$\begin{aligned} &\int_\gamma f(x,y,z) d(x,y,z) = \int_\gamma (z dx + y dy + x dz) \\ &= \int_0^1 t dt + \int_0^1 t^2 dt^2 + \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} + \int_0^1 t^2 (2t) dt + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Satz 44** *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rb Weg und $f, g : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:*

*1.)* $\int_\gamma (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_\gamma f(x) dx + \beta \int_\gamma g(x) dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

*2.)* $\int_\gamma f(x) dx = \int_{\gamma|_{[a,c]}} f(x) dx + \int_{\gamma|_{[c,b]}} f(x) dx \quad (c \in (a,b))$.

*3.)* $\int\limits_{\gamma^-} f(x)dx = -\int\limits_{\gamma} f(x)dx$

*4.)* $\left|\int\limits_{\gamma} f(x)dx\right| \leq \left(\max_{x\in\Gamma_\gamma} \|f(x)\|\right) L(\gamma).$

Bew.: Gr. Übung.

**Satz 45** *Sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *ein stetig db Weg,* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *und* $f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}^n$ *stetig. Dann gilt*

$$\int\limits_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int\limits_a^b (f(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Beweis: $\int\limits_{\gamma} f(x) \cdot dx = \sum\limits_{j=1}^n \int\limits_a^b f_j(\gamma(t))d\gamma_j(t) = \sum\limits_{j=1}^n \int\limits_a^b f_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt$
$= \int\limits_a^b \left(\sum\limits_{j=1}^n f_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\right) dt.$ ∎

Bem.: Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise stetig dber Weg und $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1},t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n)$ $(k = 1, \ldots, m)$, so gilt

$$\int\limits_{\gamma} f(x) \cdot dx = \sum_{k=1}^m \int\limits_{\gamma_k} f(x) \cdot dx$$

und jedes $\int_{\gamma_k} f(x) \cdot dx$ kann wie in Satz 45 behandelt werden.

**Satz 46** $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *und* $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ *seien rbe Wege mit* $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ *und* $\Gamma := \Gamma_\gamma = \Gamma_{\tilde{\gamma}}$.
*Ist* $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ *stetig, so gilt:*

$$\int\limits_{\gamma} f(x)dx = \int\limits_{\tilde{\gamma}} f(x)dx.$$

Beweis: Mit Riemann-Stieltjes-Summen. Übung.

**Ein weiteres Wegintegral.**

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rber Weg. Da $s$ auf $[a,b]$ wachsend ist, ist insbesondere $s \in BV([a,b],\mathbb{R})$.
Ist nun $f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f \circ \gamma \in R_s([a,b],\mathbb{R})$.

**Definition 31** *Unter obigen Voraussetzungen heißt*

$$\int_\gamma f(x)ds := \int_a^b f(\gamma(t))ds(t)$$

*Wegintegral von $f$ längs $\gamma$ bzgl. der Weglänge.*

Übung: $\int_\gamma f(x)ds = \int_{\gamma^-} f(x)ds$.

Bem.: Ist $\gamma$ sogar stetig differenzierbar, so ist $s \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ mit $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \quad (t \in [a,b])$ (vgl. Satz 40) und somit

$$\int_\gamma f(x)ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Bsp.: $\gamma(t) = (t,t^2)$ $(t \in [0,1])$, $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+3y}$.
Es gilt: $\gamma'(t) = (1,2t) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2} \Rightarrow$
$\int_\gamma f(x,y)ds = \int_0^1 \sqrt{1+t^2+3t^2}\,\sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_0^1 (1+4t^2)dt = \frac{7}{3}$.

## 16 Stammfunktionen.

**Definition 32** *Eine Menge* $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$ *heißt Gebiet* $:\Leftrightarrow$

*G ist offen und zu je zwei Punkten* $x_0, y_0 \in G$ *existiert ein Weg* $\gamma : [a,b] \to G$ *mit* $\gamma(a) = x_0$ *und* $\gamma(b) = y_0$*.*

Bem.: Jede offene konvexe nichtleere Menge ist ein Gebiet.

**Definition 33** *Sei* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $f : G \to \mathbb{R}^n$ *eine Funktion.*
$F : G \to \mathbb{R}$ *heißt Stammfunktion (SF) von* $f$ *(auf* $G$*)* $:\Leftrightarrow$

$F$ *ist differenzierbar auf* $G$ *und* $F'(x) = \operatorname{grad} F(x) = f(x)$ $(x \in G)$*.*

Bem.: 1) $n = 1:$ $G \subseteq \mathbb{R}$ Gebiet $\Leftrightarrow$ $G$ ist ein offenes Intervall (Übung). In diesem Fall hat jede auf $G$ stetige Funktion $f$ eine SF. (Wähle $x_0 \in G$ und setze $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ $(x \in G)$.)

2) Bsp.: Sei $G = \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = (y, -x)$. Angenommen, $f$ hat eine Stammfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dann gilt: $F'(x,y) = (y,-x)$ auf $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und nach dem Satz von Schwarz gilt

$$1 = F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) = -1.$$

W! Somit hat $f$ keine Stammfunktion auf $G = \mathbb{R}^2$.

3) Ist $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ und $F : G \to \mathbb{R}$ eine SF von $f$, so ist $F'(x) = f(x)$ $(x \in G)$ also $F'$ stetig auf $G$. D.h. $F \in C^1(G, \mathbb{R})$.

**Satz 47** *Sei* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet,* $x_0, y_0 \in G$ *und* $\gamma : [a,b] \to G$ *ein Weg mit* $\gamma(a) = x_0$ *und* $\gamma(b) = y_0$*. Dann existiert eine Zerlegung* $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ *von* $[a,b]$*, so daß gilt:*

$$S(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \subseteq G \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Bem.: Insbes. erhält man damit einen stückweise stetig db Weg in $G$ der $x_0$ und $y_0$ verbindet.

Beweis: Trivial für $G = \mathbb{R}^n$. Sei $G \neq \mathbb{R}^n$ und damit $\mathbb{R}^n \backslash G \neq \emptyset$. Sei $\varepsilon := \inf\{\|y - x\| : x \in \Gamma_\gamma, y \in \mathbb{R}^n \backslash G\}$.

Es gilt $\varepsilon > 0$: Angenommen $\varepsilon = 0$. Dann existieren Folgen $(x_k)$ in $\Gamma_\gamma$ und $(y_k) \in \mathbb{R}^n \backslash G$ mit $\|x_k - y_k\| \to 0$ $(k \to \infty)$. Da $\Gamma_\gamma$ kompakt ist, existiert eine konv. TF $(x_{k_l})$ von $(x_k)$ mit GW $x_0 \in \Gamma_\gamma$.

Damit gilt $\|y_{k_l} - x_0\| \leq \|y_{k_l} - x_{k_l}\| + \|x_{k_l} - x_0\| \to 0$ $(l \to \infty)$. Da $x_0 \in G$ innerer Punkt von $G$ ist ($G$ ist offen), existiert ein $l_0$ mit $y_{k_l} \in G$ $(l \geq l_0)$. W!

Da $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig ist, existiert zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Wähle nun eine Zerlegung $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ mit $|Z| < \delta$.
Dann gilt $\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(k = 1, \ldots, m)$ und damit $\|y - \gamma(t_{k-1})\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes $y \in S(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))$ $(k = 1, \ldots, m)$. Damit gilt (nach Definition von $\varepsilon$)

$$S(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \subseteq G \quad (k = 1, \ldots, m). \qquad \blacksquare$$

**Satz 48** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $g : G \to \mathbb{R}$ eine auf $G$ differenzierbare Funktion mit $g'(x) = \operatorname{grad} g(x) = 0$ $(x \in G)$. Dann ist $g$ konstant auf $G$.*

Beweis: Seien $x_0, y_0 \in G$. Dann existiert ein Weg $\gamma : [a, b] \to G$ mit $\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = y_0$ und dazu eine Zerlegung $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ mit $S(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \subseteq G$ $(k = 1, \ldots, m)$.
Nach dem MWS existiert zu jedem $k \in \{1, \ldots, m\}$ ein $\xi_k \in S(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))$ mit

$$g(\gamma(t_k)) - g(\gamma(t_{k-1})) = g'(\xi_k) \cdot (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) = 0.$$

Damit gilt $g(y_0) - g(x_0) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = \sum\limits_{k=1}^{m} (g(\gamma(t_k)) - g(\gamma(t_{k-1}))) = 0$. $\blacksquare$

Bem.: 1) Z.B.: $D = U_1((0,0)) \cup U_1((3,0)) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine offene Menge, die kein Gebiet ist, und $g : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 1$ $(x \in U_1(0,0))$ und $g(x) = -1$ $(x \in U_1(3,0))$ ist eine nicht konstante Funktion aus $C^1(D, \mathbb{R})$ mit $g'(x) = 0$ $(x \in D)$.

2) Aus Satz 48 folgt: Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die eine Stammfunktion $F : G \to \mathbb{R}$ besitzt, so ist $F$ bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.
Denn ist $\widetilde{F} : G \to \mathbb{R}$ eine weitere Stammfunktion von $f$, so gilt $(F - \widetilde{F})'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $(x \in G)$.

I.f. sei stets $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet:

**Satz 49** *(Integrabilitätsbedingung). Sei $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Besitzt $f$ eine Stammfunktion auf $G$, so gilt*

$$\frac{\partial f_j}{\partial \xi_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} \quad \text{auf } G \quad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Beweis: Sei $F : G \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f$.
Dann gilt $F \in C^1(G, \mathbb{R})$ und $F' = f$ auf $G$. Wegen $D_j F = f_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ gilt sogar $F \in C^2(G, \mathbb{R})$.
Damit gilt (vgl. Satz v. Schwarz)

$$\frac{\partial f_j}{\partial \xi_k} = F_{\xi_j \xi_k} = F_{\xi_k \xi_j} = \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} \quad (j, k = 1, \ldots, n). \quad \blacksquare$$

Bem.: Die Umkehrung von Satz 49 ist i.a. falsch. Man kann aber zusätzliche Bedingungen an $G$ stellen, so daß die Umkehrung dann gilt (später).

Berechnung von Stammfunktionen:

Bsp.: $f(x,y) = (y, x-y)$. Es gilt $\frac{\partial}{\partial y} y = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x-y)$. Nach Satz 49 könnte $f$ eine Stammfunktion haben.

Für eine Stammfunktion $F$ von $f$ muß gelten

$$F_x(x,y) = y \Rightarrow F(x,y) = xy + c(y) \quad \text{sowie} \quad F_y(x,y) = x - y$$
$$\text{also} \quad x + c'(y) = x - y \Rightarrow c(y) = -\frac{1}{2}y^2 + \tilde{c}.$$

Probe liefert: $F(x,y) = xy - \frac{1}{2}y^2$ ist eine Stammfunktion von $f$ auf $\mathbb{R}^2$.

**Satz 50** *Sei $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ und $F : G \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f$. Ist $\gamma : [a,b] \to G$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, so gilt:*

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

*D.h. $\int_\gamma f(x)dx$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt von $\gamma$ ab.*

Bem.: Aus Satz 47 folgt: Sind $x_0, y_0 \in G$, so existiert stets ein stückweise stetig db Weg in $G$, der $x_0$ mit $y_0$ verbindet.

Beweis: Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $\gamma_k := \gamma|_{[t_k, t_{k-1}]} \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(x) \cdot dx = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma_k(t)) \cdot \gamma_k'(t)dt$$
$$= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{dt}(F(\gamma_k(t)))dt = \sum_{k=1}^m (F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1})))$$
$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad \blacksquare$$

**Definition 34** *Sei $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$.*
*Wir sagen, das Integral $\int f(x) \cdot dx$ ist in $G$ wegunabhängig $:\Leftrightarrow$*

*Für je zwei Punkte $x_0, y_0 \in G$ gilt:*
*Für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma$ mit $\Gamma_\gamma \subseteq G$, Anfangspunkt von $\gamma = x_0$, Endpunkt von $\gamma = y_0$ hat $\int\limits_\gamma f(x) \cdot dx$ stets denselben Wert.*
*In diesem Fall schreibt man*

$$\int\limits_{x_0}^{y_0} f(x) \cdot dx \quad \text{statt} \quad \int\limits_\gamma f(x) \cdot dx$$

*für jeden solchen Weg $\gamma$.*

Satz 50 bedeutet also:
Besitzt $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ eine Stammfunktion auf $G$, so ist $\int f(x) \cdot dx$ wegunabhängig in $G$.

**Satz 51** *Sei $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ und $\int f(x) \cdot dx$ in $G$ wegunabhängig. Dann besitzt $f$ eine Stammfunktion auf $G$. Eine solche ist z.B.*

$$F(z) := \int\limits_{x_0}^{z} f(x) \cdot dx \quad (z \in G).$$
$$(x_0 \in G \text{ fest.})$$

Beweis: Sei $z \in G$ fest. Wir zeigen:

$$g(h) := \frac{F(z+h) - F(z) - f(z) \cdot h}{\|h\|} \to 0 \quad (h \to 0)$$

(dann ist $F$ differenzierbar in $z$ und $F'(z) = f(z)$).
Wähle $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(z) \subseteq G$. (Bea.: $G$ ist offen!)
Betrachte $h \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < \|h\| < \varepsilon$ und dazu

$$\gamma(t) := z + ht \quad (t \in [0,1]).$$

Wegen $\|z - \gamma(t)\| = |t| \; \|h\| \leq \|h\| < \varepsilon \quad (t \in [0,1])$ gilt

$$\Gamma_\gamma \subseteq U_\varepsilon(z) \subseteq G.$$

Wähle stückweise stetig differenzierbare Wege $\gamma_1, \gamma_2$ mit:

1) $\Gamma_{\gamma_1}, \Gamma_{\gamma_2} \subseteq G$;

2) Anfangspunkt von $\gamma_1$ und $\gamma_2$ ist $x_0$;

3) Endpunkt von $\gamma_1$ ist $z$ und Endpunkt von $\gamma_2$ ist $z + h$.

(Solche Wege ex. vgl. Satz 47).

Dann gilt:

$$\int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{z+h} f(x) \cdot dx = F(z+h),$$
$$\int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{z} f(x) \cdot dx = F(z).$$

Sei $\gamma_3$ der Weg, der durch Aneinanderhängen von $\gamma_1$ und $\gamma$ (es existieren geeignete Parametertransformationen) entsteht. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(z+h) &= \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_3} f(x) \cdot dx \\ &= \int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx + \int_{\gamma} f(x) \cdot dx = F(z) + \int_{\gamma} f(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

Weiter ist $\int_{\gamma} f(z) \cdot dx = \int_0^1 f(z) \cdot \gamma'(t) dt = f(z) \cdot h$ und daher

$$\begin{aligned} |g(h)| &= \frac{1}{\|h\|} \left| F(z+h) - F(z) - f(z) \cdot h \right| \\ &= \frac{1}{\|h\|} \left| \int_{\gamma} (f(x) - f(z)) \cdot dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\|h\|} \left( \max_{x \in \Gamma_\gamma} \|f(x) - f(z)\| \right) L(\gamma) \\ &= \max_{x \in \Gamma_\gamma} \|f(x) - f(z)\| \\ &= \|f(x_h) - f(z)\| \quad \text{für ein } x_h \in \Gamma_\gamma. \end{aligned}$$

Fazit: Zu jedem $h$ mit $0 < \|h\| < \varepsilon$ existiert $x_h \in S(z, z+h) = \Gamma_\gamma$ mit $|g(h)| = \|f(x_h) - f(z)\|$. Aus $h \to 0$ folgt $x_h \to z$ und (da $f$ stetig) folgt $\|f(x_h) - f(z)\| \to 0$.
Damit gilt

$$|g(h)| \to 0 \quad (h \to 0). \qquad \blacksquare$$

**Satz 52** *Ist $G$ konvex und $f = (f_1, \ldots, f_n) \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

*1) $f$ besitzt auf $G$ eine Stammfunktion.*

*2) Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt.*

*3) $\int f(x) \cdot dx$ ist wegunabhängig in $G$.*

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) und 3) $\Leftrightarrow$ 1) sind bereits bewiesen (und gelten ohne die Voraussetzung, daß $G$ konvex ist).

2) $\Rightarrow$ 1): Sei $x_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in G$ fest. Für jedes $z = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in G$ sei $\gamma_z(t) := x_0 + t(z - x_0)$ $(t \in [0,1])$.
Bea.: $\Gamma_{\gamma_z} \subseteq G$ $(z \in G)$, da $G$ konvex.

Setze

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(x) \cdot dx = \int_0^1 f(x_0 + t(z - x_0)) \cdot (z - x_0) dt.$$

Die partiellen Ableitungen von $F$ kann man "unter das Integral ziehen" (Übung). Es gilt $(j = 1, \ldots, n)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \eta_j}(z) &= \int_0^1 f_j(\gamma_z(t)) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_k}{\partial \eta_j}(\gamma_z(t)) \right) t(\eta_k - \xi_k) dt \\ &= \int_0^1 f_j(\gamma_z(t)) + t \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial f_j}{\partial \eta_k}(\gamma_z(t)) \right) (\eta_k - \xi_k) dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}(tf_j(x_0 + t(z - x_0)))dt = [tf_j(x_0 + t(z - x_0))]_0^1 \\
&= f_j(z). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Bem.: Obiger Beweis funktioniert auch wenn das Gebiet $G$ als sternförmig angenommen wird. Dabei heißt $G$ sternförmig wenn ein $x_0 \in G$ existiert mit $S(x_0, z) \subseteq G$ $(z \in G)$.