17 Integration von Treppenfunktionen

Definition 35 *(1)* $\mathcal{M} := \{I \subseteq \mathbb{R} : I$ *ist ein* **beschränktes** *Intervall* $\}$. *Also:* $I \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : a < b$ *und* $I = [a, b]$ *oder* $I = (a, b)$ *oder* $I = (a, b]$ *oder* $I = [a, b)$ *oder* $I = \{a\}$.
In den ersten 4 Fällen setzt man die Intervalllänge

$$|I| := b - a$$

und

$$|I| := 0, \quad \textit{falls } I = \{a\}$$

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$ *und* $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{M}$. $Q := I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ *heißt ein* **Quader im** $\mathbb{R}^n$ *und*

$$v_n(Q) := |I_1| \cdot \cdots \cdot |I_n|$$

das (n-dimensionale) **Volumen von** Q.

(3) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *heißt eine* **Treppenfunktion** *(im* $\mathbb{R}^n$*)* $:\Leftrightarrow \exists$ *Quader* $Q_1, \ldots, Q_m$ *im* $\mathbb{R}^n$*:*
(i) $Q_i \cap Q_k = \emptyset$ $(i \neq k)$*;*
(ii) φ *ist auf jedem* Q_j *konstant und*
(iii) $\varphi = 0$ *auf* $\mathbb{R}^n \setminus (Q_1 \cup \cdots \cup Q_m)$.
τ_n = *Menge aller Treppenfunktionen* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ohne Beweis ($\to$ Literatur)

Satz 53 *(1) Sind* $Q'_1, \ldots, Q'_k$ *Quader im* $\mathbb{R}^n$*, so existieren Quader* $Q_1, \ldots, Q_m$ *im* $\mathbb{R}^n$ *mit:*
(a)

$$Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_k \;=\; Q_1 \cup \cdots \cup Q_m;$$

(b) Jedes Q_j *ist in einem* Q'_l *enthalten;*
(c)

$$Q_j \cap Q_l = \emptyset \ (j \neq l).$$

Beachte: *$Q_1, \dots, Q_m$ sind i.a.* **nicht** *eindeutig bestimmt!*

(2) τ_n ist ein reeller Vektorraum.

(3) Aus $\varphi, \psi \in \tau_n$ folgt $|\varphi|, \varphi \cdot \psi \in \tau_n$.

Definition 36 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$*

$$1_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

1_A heißt die **charakteristische Funktion von** *A.*

Bemerkungen:
(1) Aus Satz 53(1) folgt: $\varphi \in \tau_n \Leftrightarrow$
$\exists$ Quader $Q_1, \dots, Q_m$ im $\mathbb{R}^n$ und $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$:

$$(*) \qquad\qquad \varphi = \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{Q_j}$$

$\Rightarrow$ Beachte: In $(*)$ wird **nicht** gefordert: $Q_j \cap Q_k = \emptyset$ $(j \neq k)$
(2) Die Darstellung von φ in $(*)$ ist i.a. nicht eindeutig.
(3) Hat φ die Form $(*)$, so existieren Quader $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_l$ und $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_l \in \mathbb{R}$:
$\varphi = \sum\limits_{j=1}^{l} \tilde{c}_j 1_{\tilde{Q}_j}$ und $\tilde{Q}_j \cap \tilde{Q}_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ (vgl. Satz 53).

Beispiel: $\varphi = c_1 1_{Q_1} + c_2 1_{Q_2}$

Dann:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus (Q_1 \cup Q_2) \\ c_1 + c_2, & x \in Q_1 \cap Q_2 \\ c_1, & x \in Q_1 \setminus Q_2 \\ c_2, & x \in Q_2 \setminus Q_1 \end{cases}$$

Satz 54 *Sei $\varphi \in \tau_n$ wie in $(*)$.*

$$\int \varphi dx := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi dx := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx := \int \varphi(x) dx := \sum_{j=1}^{m} c_j v_n(Q_j).$$

Beh.: $\int \varphi dx$ ist wohldefiniert, d.h.: obige Definition ist unabhängig von der Darstellung $(*)$ von φ.

Vorbemerkung: Sei Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$, also $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ $(I_j \in \mathcal{M})$. Sei $p \in \{1, \ldots, n-1\}$; $P := I_1 \times \cdots \times I_p,\ R := I_{p+1} \times \cdots \times I_n$. dann sind P und R Quader im $\mathbb{R}^p$ bzw. $\mathbb{R}^{n-p}$, $Q = P \times R,\ v_n(Q) = v_p(P) \cdot v_{n-p}(R)$.

Beweis von Satz 54: Induktion nach n.

I.A: $n = 1$ Übung.
I.V: Die Behauptung sei richtig für jedes $q \in \{1, \ldots, n-1\}$.
I.S: Sei $p \in \{1, \ldots, n-1\}, \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Für $z \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^{n-p}$.

Zu jedem Q_j existieren Quader P_j im $\mathbb{R}^p$ und Quader R_j im $\mathbb{R}^{n-p}$: $Q_j = P_j \times R_j$.
Weiter ist $v_n(Q_j) = v_p(P_j) v_{n-p}(R_j)$ und

$$1_{Q_j}(x, y) = 1_{P_j}(x) 1_{R_j}(y) \quad (z = (x, y) \in \mathbb{R}^n).$$

Sei $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ (fest). $\varphi_y : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\varphi_y(x) := \varphi(x, y)$. Dann gilt:

$$\varphi_y(x) = \sum_{j=1}^m c_j 1_{Q_j}(x, y) = \sum_{j=1}^m c_j 1_{P_j}(x) 1_{R_j}(y)$$

$$= \sum_{j=1}^m c_j 1_{R_j}(y) 1_{P_j}(x) = \sum_{j=1}^m d_j 1_{P_j}(x)$$

mit $d_j = d_j(y) := c_j 1_{R_j}(y)$. Somit: $\varphi_y \in \tau_p$.
I.V. $\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x, y) dx = \sum\limits_{j=1}^m d_j v_p(P_j)$ ist unabhängig von der Darstellung von φ_y (und damit von φ).

Sei $\phi : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$ def. durch $\phi(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) dx$
$= \int\limits_{\mathbb{R}^p} \varphi(x, y) dx$, also: $\phi(y) = \sum\limits_{j=1}^m d_j(y) v_p(P_j)$

$= \sum_{j=1}^{m} c_j 1_{R_j}(y) v_p(P_j) = \sum_{j=1}^{m} c_j v_p(P_j) 1_{R_j}(y)$.
Somit: $\phi \in \tau_{n-p}$.
I.V. $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \phi(y)dy = \sum_{j=1}^{m} c_j v_p(P_j) v_{n-p}(R_j)$
$= \sum_{j=1}^{m} c_j v_n(Q_j)$ ist unabhängig von der Darstellung von φ. Hieraus folgt die Behauptung.
Bem.: Insbesondere gilt: $\sum_{j=1}^{m} c_j v_n(Q_j) = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} (\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x,y)dx)dy$.
∎

Aus obigem Beweis (vgl. die Bem.) folgt für jedes $\varphi \in \tau_n$:

Satz 55 Satz von Fubini für Treppenfunktionen.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)dz = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} (\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x,y)dx)dy = \int_{\mathbb{R}^p} (\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi(x,y)dy)dx,$$

für $p \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Satz 56 *Seien* $\varphi, \psi \in \tau_n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(1) $\int (\alpha\varphi + \beta\psi)dx = \alpha \int \varphi dx + \beta \int \psi dx$.
(2) $|\int \varphi dx| \leq \int |\varphi| dx$.
(3) Aus $\varphi \leq \psi$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *folgt* $\int \varphi dx \leq \int \psi dx$.

Beweis: (1), (3) Übung.
(2) Sei φ wie in $(*)$. 53(1) $\Rightarrow$ o.B.d.A.: $Q_j \cap Q_k = \emptyset$ $(j \neq k)$. Ist $x \in Q_j \Rightarrow x \notin Q_k$ $(k \neq j) \Rightarrow \varphi(x) = c_j \Rightarrow |\varphi(x)| = |c_j| \Rightarrow$

$$|\varphi| = \sum_{j=1}^{m} |c_j| 1_{Q_j}$$

$\Rightarrow |\int \varphi dx| = |\sum_{j=1}^{m} c_j v_n(Q_j)| \leq \sum_{j=1}^{m} |c_j| v_n(Q_j) = \int |\varphi| dx$. ∎

18 Das Lebesguesche Integral.

Es sei $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Im Folgenden lassen wir Funktionen und Reihen mit Werten in $\tilde{\mathbb{R}}$ zu.

Regeln: $a < \infty$ $(a \in \mathbb{R})$, $\infty \leq \infty$, $\infty \pm c = c \pm \infty = \infty$ $(c \in \mathbb{R})$, $\infty \pm \infty = \infty$, $\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty$ $(c \in \tilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\})$, $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$.

Sei (a_n) eine Folge in $\tilde{\mathbb{R}}$ und $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n := \infty$, falls alle $a_n \in \mathbb{R}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert oder falls $a_n = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Sei $A \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$ und $a \geq 0$ $(a \in A)$.

$$\inf A := \begin{cases} \infty, \text{ falls } A = \{\infty\} \\ \inf(A \setminus \{\infty\}), \text{ falls } A \setminus \{\infty\} \neq \emptyset \end{cases}$$

Motivation: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}$. $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x) \leq y\}$.

Seien $Q_1, Q_2, \ldots$ offene Quader im $\mathbb{R}^1$ und $c_1, c_2, \cdots \geq 0$ und es gelte $f(x) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j 1_{Q_j}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$
$(\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j 1_{Q_j}(x) = \infty$ ist zugelassen!).
Dann kann man $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j v_1(Q_j)$ als obere Approximation für den "Inhalt" von M betrachten.

Verabredung: Im Folgenden bedeutet $\sum\limits_k$ entweder eine endliche Summe oder eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ldots$.

Definition 37 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Gegeben: Endlich oder abzählbar viele Paare (Q_1, c_1), $(Q_2, c_2), \ldots,$ wobei jedes $c_j \in [0, \infty)$ und jedes Q_j ein* **offener** *Quader im $\mathbb{R}^n$ ist.*
Gilt $|f(x)| \leq \sum\limits_k c_k 1_{Q_k}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$,
so heißt $\phi := \sum\limits_k c_k 1_{Q_k}$ eine **Hüllreihe für** *f*

und

$$I(\phi) := \sum_k c_k v_n(Q_k) \text{ ihr Inhalt } .$$

$\mathcal{H}(f) := \{\phi : \phi$ *ist eine Hüllreihe für* $f\}$, *und*
$\|f\|_1 := \inf\{I(\phi) : \phi \in \mathcal{H}(f)\}$
heißt L_1**-Halbnorm von** f**.**

Beachte: $\|f\|_1 \geq 0$, $\|f\|_1 = \infty$ ist zugelassen!

Behauptung: $\mathcal{H}(f) \neq \emptyset$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_k := (-k,k) \times \cdots \times (-k,k) \subseteq \mathbb{R}^n$.
Q_k ist ein offener Quader im $\mathbb{R}^n$, $v_n(Q_k) = (2k)^n$.

$\phi := \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot 1_{Q_k}$. Dann $\phi(x) = \infty$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, also $\phi \in \mathcal{H}(f)$ und
$I(\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^n = \infty$. ■

Beispiel: $(n = 1)$. Sei $A := \{0\}$ $(\subseteq \mathbb{R})$ und $f := 1_A$, also $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$. Sei $\varepsilon > 0$ und $Q := (-\varepsilon, \varepsilon)$; $\phi := 1_Q \Rightarrow \phi \in \mathcal{H}(f)$ und $I(\phi) = v_1(Q) = 2\varepsilon \Rightarrow \|f\|_1 \leq 2\varepsilon \Rightarrow_{\varepsilon \to 0} \|f\|_1 = 0$, aber $f \neq 0$.

Satz 57 $f, g, f_1, f_2, \cdots : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ *seien Funktionen.*
(1) $\forall c \in \mathbb{R} : \|cf\|_1 = |c| \, \|f\|_1$;
(2) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$;
(3) Aus $|f| \leq |g|$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *folgt* $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$
(4) $\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1$.

Beweis: (1) klar.
(2) O.B.d.A.: $\|f\|_1 + \|g\|_1 < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\phi_1 \in \mathcal{H}(f)$, $\phi_2 \in \mathcal{H}(g)$ mit: $I(\phi_1) \leq \|f\|_1 + \varepsilon$, $I(\phi_2) \leq \|g\|_1 + \varepsilon$. $\phi := \phi_1 + \phi_2 \Rightarrow \phi \in \mathcal{H}(f+g)$ und $I(\phi) = I(\phi_1) + I(\phi_2) \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + 2\varepsilon \Rightarrow \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig folgt die Behauptung.

(3) Sei $\phi \in \mathcal{H}(g) \Rightarrow \phi \in \mathcal{H}(f)$, also $\mathcal{H}(g) \subseteq \mathcal{H}(f) \Rightarrow$ Behauptung.

(4) In den gr. Übungen. ■

Satz 58 *Ist Q ein* **abgeschlossener** *Quader im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$v_n(Q) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_Q(x)dx = \|1_Q\|_1$$

Beweis: Sei $f := 1_Q \Rightarrow f \in \tau_n \Rightarrow \int 1_Q(x)dx = v_n(Q)$.
(1) Sei $\varepsilon > 0$ und $\hat{Q}$ ein offener Quader mit $Q \subseteq \hat{Q}$ und $v_n(\hat{Q}) = v_n(Q) + \varepsilon$.

$\phi := 1_{\hat{Q}} \Rightarrow \phi \in \mathcal{H}(f)$ und $I(\phi) = v_n(\hat{Q}) = v_n(Q) + \varepsilon \Rightarrow \|f\|_1 \leq v_n(Q) + \varepsilon \Rightarrow_{\varepsilon \to 0} \|f\|_1 \leq v_n(Q)$.

(2) Sei $\phi = \sum\limits_k c_k 1_{Q_k} \in \mathcal{H}(f)$, also $c_k \geq 0$, und Q_k offene Quader im $\mathbb{R}^n$.

Sei $\varepsilon \in (0,1)$.
Für $x \in Q:\ 1 = 1_Q(x) = f(x) = |f(x)| \leq \phi(x) = \sum\limits_k c_k 1_{Q_k}(x)$.

$\exists n(x) \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=1}^{n(x)} c_k 1_{Q_k}(x) \geq 1 - \varepsilon$ und damit $1_{Q_k}(x) = 1$ für mind. ein $k \in \{1, \ldots, n(x)\}$.

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n(x)}$ offen. Wähle $\delta_x > 0$ mit: $U_{\delta_x}(x) \subseteq Q_k$ für jedes $k \in \{1, \ldots, n(x)\}$ für das $x \in Q_k$ gilt. Damit:

$$\sum_{k=1}^{n(x)} c_k 1_{Q_k}(z) \geq 1 - \varepsilon \quad (z \in U_{\delta_x}(x)) \qquad (*)$$

$Q \subseteq \bigcup_{x \in Q} U_{\delta_x}(x)$; Q ist abgeschlossen und beschränkt.
$\Rightarrow\ \exists x_1, \ldots, x_p \in Q:\ Q \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} U_{\delta_{x_j}}(x_j)$
$N := \max\{n(x_1), \ldots, n(x_p)\}$

$\varphi_1 := \sum\limits_{k=1}^{N} c_k 1_{Q_k},\ \varphi_2 := (1-\varepsilon)1_Q \Rightarrow \varphi_1, \varphi_2 \in \tau_n$

Für $x \notin Q : \varphi_2(x) = 0 \leq \varphi_1(x)$

Für $x \in Q : \varphi_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k 1_{Q_k}(x)$.

$\exists j \in \{1, \ldots, p\}$:

$x \in U_{\delta_{x_j}}(x_j) \Rightarrow \varphi_1(x) \geq \sum\limits_{k=1}^{n(x_j)} c_k 1_{Q_k}(x) \geq 1 - \varepsilon = \varphi_2(x)$.

Also: $\varphi_2 \leq \varphi_1$ auf $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$

$$(1-\varepsilon)v_n(Q) = \int \varphi_2 dx \leq \int \varphi_1 dx$$

$$= \sum_{k=1}^{N} c_k v_n(Q_k) \leq \sum_{k} c_k v_n(Q_k) = I(\phi)$$

Also: $(1-\varepsilon)v_n(Q) \leq I(\phi) \Rightarrow_{\varepsilon \to 0} v_n(Q) \leq I(\phi) \Rightarrow v_n(Q) \leq \|f\|_1$.

■

Satz 59 Hilfssatz: *Sei $\varphi \in \tau_n$.*
Dann exisiteren paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_m, R_1, \ldots, R_r$ im $\mathbb{R}^n$ und $c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{R}$ mit: $Q_1, \ldots, Q_m$ sind offen, $v_n(R_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ und

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{Q_k} + \sum_{k=1}^{r} d_k 1_{R_k}$$

Beweis: Sei $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{s} \hat{c}_k 1_{\hat{Q}_k}$ mit paarweise disjunkten Quadern $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_s$.

O.B.d.A.: $s = 1$, also $\varphi = \hat{c}1_{\hat{Q}}$, und $\hat{Q}$ nicht offen.

Dann gilt $\hat{Q} = \hat{Q}^\circ \cup R_1 \cup \cdots \cup R_\nu$, wobei $R_1, \ldots, R_\nu \subseteq \partial\hat{Q}$ und $\hat{Q}^\circ, R_1, \ldots, R_\nu$ paarweise disjunkt. Dann:

$$\varphi = \hat{c}1_{\hat{Q}^\circ} + \hat{c}1_{R_1} + \cdots + \hat{c}1_{R_\nu}.$$

■

Satz 60 *Sei $\varphi \in \tau_n$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein beliebiger Quader. Dann gilt:*
(1) $\mathcal{H}(\varphi) = \mathcal{H}(|\varphi|)$, insbesondere: $\| \, |\varphi| \, \|_1 = \|\varphi\|_1$.
(2) $\|\varphi\|_1 = \int |\varphi| dx$.
(3) $v_n(Q) = \int 1_Q dx = \|1_Q\|_1$.

Beweis: (1) klar. (3) folgt aus (2) mit $\varphi = 1_Q$.
(2) Sei $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{s} \hat{c}_k 1_{\hat{Q}_k}$ mit $\hat{c}_k \in \mathbb{R}$ und $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_s$ paarweise disjunkt. Anwendung von Satz 59 auf jedes nicht offene $\hat{Q}_j$ liefert:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{Q_k} + \sum_{k=1}^{r} d_k 1_{R_k},$$

wobei $Q_1, \dots, Q_m, R_1, \dots, R_r$ paarweise disjunkte Quader, $Q_1, \dots, Q_m$ offen und $v_n(R_k) = 0$ $(k = 1, \dots, r)$. Dann:

$$\int \varphi dx = \sum_{k=1}^{m} c_k v_n(Q_k).$$

Wegen (1): O.B.d.A.: $\varphi \geq 0$. Dann: $c_k, d_k \geq 0,\ \alpha := \sum\limits_{k=1}^{r} d_k$.

Sei $\varepsilon > 0$: Wähle zu jedem R_k einen offenen Quader $\hat{R}_k$ mit $R_k \subseteq \hat{R}_k$ und $v_n(\hat{R}_k) = \varepsilon$.

$$\phi := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{Q_k} + \sum_{k=1}^{r} d_k 1_{\hat{R}_k} \Rightarrow \phi \in \mathcal{H}(\varphi)$$

und

$$I(\phi) = \sum_{k=1}^{m} c_k v_k(Q_k) + \alpha\varepsilon = \int \varphi dx + \alpha\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\varphi\|_1 \leq \int \varphi dx + \alpha\varepsilon$$

$$\Rightarrow_{\varepsilon \to 0} \quad \|\varphi\|_1 \leq \int \varphi dx.$$

Sei Q ein **abgeschlossener** Quader mit

$$Q_1 \cup \dots \cup Q_m \cup R_1 \cup \cdots R_r \subseteq Q$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = 0 \ (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q).$$

Setze $m := \max\{\varphi(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, $\psi := m1_Q - \varphi \Rightarrow \psi \in \tau_n,\ \psi \geq 0$. Wie oben: $\|\psi\|_1 \leq \int \psi dx$.

$$\begin{aligned}
\int \varphi dx &= \int (m1_Q - \psi) dx = m \int 1_Q dx - \int \psi dx \\
&\leq m \int 1_Q dx - \|\psi\|_1 =_{Satz\ 58} m\|1_Q\|_1 - \|\psi\|_1 \\
&= \|m1_Q\|_1 - \|\psi\|_1 = \|\varphi + \psi\|_1 - \|\psi\|_1 \\
&\leq \|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1 - \|\psi\|_1 = \|\varphi\|_1
\end{aligned}$$

■

Satz 61 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ eine Funktion, $(\varphi_k), (\psi_k)$ seien Folgen in τ_n und es gelte $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$ und $\|f - \psi_k\|_1 \to 0$ $(k \to \infty)$. Dann sind $(\int \varphi_k dx)$ und $(\int \psi_k dx)$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ und*

$$\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k dx = \lim_{k\to\infty} \int \psi_k dx.$$

Beweis: $a_k := \int \varphi_k dx,\ b_k := \int \psi_k dx\ (k \in \mathbb{N})$.
$|a_k - a_l| = |\int (\varphi_k - \varphi_l) dx| \leq \int |\varphi_k - \varphi_l| dx = \|\varphi_k - \varphi_l\|_1 = \|\varphi_k - f + f - \varphi_l\|_1 \leq \|\varphi_k - f\|_1 + \|f - \varphi_l\|_1 \Rightarrow (a_k)$ ist eine CF in $\mathbb{R}$, also konvergent.
Genauso: (b_k) ist konvergent. $a := \lim a_k,\ b := \lim b_k$.
Dann: $|a_k - b_k| \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|f - \psi_k\|_1 \Rightarrow a = b$. ■

Definition 38 *(1)* $L(\mathbb{R}^n) :=$

$$\{f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}} : \exists \text{ Folge } (\varphi_k) \text{ in } \tau_n \text{ mit } \|f - \varphi_k\|_1 \to 0\ (k \to \infty)\}.$$

(2) Ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$, so heißt f **Lebesgue integrierbar** *über $\mathbb{R}^n$.*
(3) Ist $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und (φ_k) eine Folge in τ_n mit $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$ $(k \to \infty)$, so heißt

$$\int f dx := \int f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k dx$$

das **Lebesgueintegral von** f **über** $\mathbb{R}^n$.

Bemerkungen:
(1) Wegen Satz 61 ist $\int f dx$ wohldefiniert und in $\mathbb{R}$.
(2) Sei $\varphi \in \tau_n$. Wähle $(\varphi_k) = (\varphi, \varphi, \varphi, \dots) \Rightarrow \|\varphi_k - \varphi\|_1 = 0$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow \varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ und obiges Integral von φ ist das Integral von φ aus Satz 54.
Insbesondere: $\tau_n \subseteq L(\mathbb{R}^n)$.

Satz 62 *Es seien $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*
(1) $\alpha f + \beta g \in L(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx.$$

(2) $|f| \in L(\mathbb{R}^n)$ und

$$|\int f dx| \leq \int |f| dx (= \|f\|_1).$$

(3) Aus $f \leq g$ auf $\mathbb{R}^n$ folgt: $\int f dx \leq \int g dx$.
(4) Ist g auf $\mathbb{R}^n$ beschränkt $\Rightarrow fg \in L(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: (1) klar.
(2) Sei (φ_k) eine Folge in τ_n mit $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$. Dann ist $(|\varphi_k|)$ eine Folge in τ_n und

$$|\,|f| - |\varphi_k|\,| \leq |f - \varphi_k|$$

auf $\mathbb{R}^n$. Somit:

$$\|\,|f| - |\varphi_k|\,\|_1 \leq_{Satz\ 57} \|f - \varphi_k\|_1 \Rightarrow |f| \in L(\mathbb{R}^n)$$

und

$$|\int f dx| = |\lim \int \varphi_k dx| = \lim |\int \varphi_k dx|$$
$$\leq \lim \int |\varphi_k| dx = \int |f| dx.$$
$$\|f\|_1 = \|f - \varphi_k + \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|\varphi_k\|_1$$
$$\Rightarrow_{k \to \infty} \|f\|_1 \leq \int |f| dx.$$

$$\|\varphi_k\|_1 = \|\varphi_k - f + f\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|f\|_1$$
$$\Rightarrow_{k\to\infty} \int |f|dx \leq \|f\|_1$$

(3) $g - f \geq$ auf $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \int g dx - \int f dx =_{(1)} \int (g-f)dx$$
$$= \int |g-f|dx =_{(2)} \|g-f\|_1 \geq 0.$$

(4) $\exists M > 0 : |g| \leq M$ auf $\mathbb{R}^n$. Sei $k \in \mathbb{N}$.

$$\exists \varphi_k \in \tau_n : \|f - \varphi_k\|_1 \leq \frac{1}{2Mk};$$
$$\exists \gamma > 0 : |\varphi_k| \leq \gamma \text{ auf } \mathbb{R}^n;$$

$\exists \psi_k \in \tau_n$:

$$\|g - \psi_k\|_1 \leq \frac{1}{2\gamma k}.$$

Dann: $\varphi_k \psi_k \in \tau_n$ und

$$|fg - \varphi_k\psi_k| = |gf - g\varphi_k + g\varphi_k - \varphi_k\psi_k|$$
$$\leq |g|\ |f-\varphi_k| + |\varphi_k|\ |g - \psi_k| \leq M|f-\varphi_k| + \gamma|g-\psi_k|$$
$$\Rightarrow_{Satz\ 57} \ \|fg - \varphi_k\psi_k\|_1 \leq M\|f-\varphi_k\|_1 + \gamma\|g-\psi_k\|_1$$
$$\leq M \cdot \frac{1}{2Mk} + \gamma\frac{1}{2\gamma k} = \frac{1}{k}.$$

Hieraus folgt die Behauptung ∎

Definition 39 *Sei* $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *(nicht* $\tilde{\mathbb{R}}$*!) seien Funktionen.*

$$\max(f,g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}\ (x \in D)$$
$$\min(f,g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}\ (x \in D)$$

Es ist $\max(\min)(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + (-)|f-g|)$
$f^+ := \max(f, 0), f^- := \max(-f, 0)$. *Dann:* $f^+, f^- \geq 0$ *und* $f = f^+ - f^-$.

Folgerung: Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen und $f, g \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \max(f,g), \min(f,g), f^+, f^- \in L(\mathbb{R}^n)$.

Satz 63 Kleiner Satz von Beppo Levi. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, (φ_k) sei eine Folge in τ_n und es gelte: $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \dots$ auf $\mathbb{R}^n$; $\varphi_k(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ und $(\int \varphi_k dx)$ sei beschränkt. Dann gilt:*

$$f \in L(\mathbb{R}^n) \text{ und } \int f dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k dx.$$

Beweis: Für $j \in \mathbb{N}$:

$$a_j := \int \varphi_{j+1} dx - \int \varphi_j dx \geq 0.$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = \int \varphi_{m+1} dx - \int \varphi_1 dx$$

$\Rightarrow \left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_j \right)$ ist beschr. Somit: $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ konv.

Für $k \in \mathbb{N}$: $c_k := \sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$, $c_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $m \geq k$.

$$\sum_{j=k}^{m} (\varphi_{j+1} - \varphi_j) = \varphi_{m+1} - \varphi_k \to f - \varphi_k \ (m \to \infty)$$

$$\Rightarrow f - \varphi_k = \sum_{j=k}^{\infty} (\varphi_{j+1} - \varphi_j)$$

$$\Rightarrow \|f - \varphi_k\|_1 \leq_{Satz\ 57} \sum_{j=k}^{\infty} \|\varphi_{j+1} - \varphi_j\|_1$$

$$= \sum_{j=k}^{\infty} \int |\varphi_{j+1} - \varphi_j| dx = \sum_{j=k}^{\infty} a_j = c_k \to 0$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Definition 40 *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*.*
(1) Für $f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ *:* $f_A(x) := f(x) \cdot 1_A(x)$*,* $\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1$*.*
(2) $L(A) := \{f : A \to \tilde{\mathbb{R}} : f_A \in L(\mathbb{R}^n)\}$*. Ist* $f \in L(A)$*, so heißt* f **Legesgue integrierbar über** A *und*

$$\int_A f dx := \int_A f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x) dx$$

das **Lebesgueintegral von** f **über** A**.**
Beachte: $\int_\emptyset f dx = 0$

Satz 64 *Satz 62 (einschl. Folgerung) gilt sinngemäß für* $L(A)$*. Insbesondere*

$$\int_A |f| dx = \|f\|_{1,A} \quad (f \in L(A)).$$

Beispiel: $n = 1,\ A = [0,1],\ f(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in A \cap \mathbb{Q} \end{cases}.$
Bekannt: $f \notin R([0,1])$. Große Üb.: $f \in L(A)$ und $\int_A f dx = 1$.

Satz 65 *Sei* $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a < b)$ *und* $f \in R([a,b])$*. Dann:* $f \in L(I)$ *und* $\int_a^b f dx = \int_I f dx$*.*
Also: $R([a,b]) \subseteq L([a,b])$*, aber* $R([a,b]) \neq L([a,b])$*.*

Beweis: $h := f_I$.
(1) Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_m\} \in \mathcal{Z},\ I_j := [x_{j-1}, x_j],\ m_j := \inf(I_j)$, $M_j := \sup f(I_j),\ Q_j := (x_{j-1}, x_j)\ (j = 1, \ldots, m)$. Zu Z def. wir $\varphi \in \tau_1$ durch:

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in Z \\ m_j, & \text{falls } x \in Q_j \\ 0, & \text{falls } x \notin [a,b] \end{cases}.$$

Es ist

$$\int \varphi dx = \sum_{j=1}^m m_j v_1(Q_j) = \sum_{j=1}^m m_j |I_j| = s_f(Z).$$

Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch $\phi := \sum_{j=1}^{m} (M_j - m_j) 1_{Q_j}$.
Dann: $0 \leq h - \varphi \leq \phi$ auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\phi \in \mathcal{H}(h - \varphi)$ und

$$I(\phi) = \sum_{j=1}^{m} (M_j - m_j)|I_j| = S_f(Z) - s_f(Z)$$

$$\Rightarrow \|h - \varphi\|_1 \leq S_f(Z) - s_f(Z).$$

(2) Sei (Z_k) eine Folge in $\mathcal{Z}$ mit $|Z_k| \to 0$

$$\Rightarrow S_f(Z_k) \to \int_a^b f dx, \; s_f(Z_k) \to \int_a^b f dx.$$

Zu jedem Z_k konstruiere $\varphi_k \in \tau_1$ wie in (1). Dann:
$\|h - \varphi_k\|_1 \leq S_f(Z_k) - s_f(Z_k) \Rightarrow \|h - \varphi_k\|_1 \to 0 \Rightarrow h \in L(\mathbb{R})$ und $\int h dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k dx \Rightarrow f \in L(I)$ und

$$\int_I f dx = \int h dx = \lim_{k\to\infty} s_f(Z_k) = \int_a^b f dx.$$

■

Satz 66 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C(A, \mathbb{R})$ und $f \geq 0$ auf A. Dann existiert eine Folge (φ_k) in τ_n mit:*

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \dots \text{ auf } \mathbb{R}^n$$

und

$$\varphi_k(x) \to f_A(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Insbesondere: $\varphi_k \leq f_A$ auf $\mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$.

Beweis: $g := f_A$. $\mathbb{Q}^n := \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}\}$, $Q^+ := \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$.
Für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$ und $r \in \mathbb{Q}^+$:

$W_r(a) := [a_1 - r, a_1 + r] \times [a_2 - r, a_2 + r] \times \dots \times [a_n - r, a_n + r]$.

$m_{r,a} := \inf g(W_r(a))$, $\psi_{r,a} := m_{r,a} \cdot 1_{W_r(a)} \in \tau_n$.
Dann: $(*)$ $0 \leq \psi_{r,a} \leq g$ auf $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{T} := \{\psi_{r,a} : a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}\} \subseteq \tau_n$. $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar, Q^+ ist abzählbar $\Rightarrow \mathcal{T}$ ist abzählbar, etwa $\mathcal{T} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$.
Für $x \in \mathbb{R}^n :\ s(x) := \sup\{\psi(x) : \psi \in \mathcal{T}\}$.
Aus $(*)$: $s \leq g$ auf $\mathbb{R}^n$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Fall 1: $x_0 \notin A \Rightarrow g(x_0) = 0 \leq s(x_0)$.
Fall 2: $x_0 \in A$. Sei $\varepsilon > 0$. f stetig, A offen $\Rightarrow$
$\exists a \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}^+ : x_0 \in W_r(a) \subseteq A$ und

$$|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (z \in W_r(a)).$$

$$\Rightarrow g(z) \geq f(x_0) - \varepsilon = g(x_0) - \varepsilon \quad (z \in W_r(a))$$

$$\Rightarrow m_{r,a} \geq g(x_0) - \varepsilon \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon \leq \psi_{r,a}(x_0) \leq s(x_0).$$

Also: $g(x_0) - \varepsilon \leq s(x_0) \Rightarrow_{\varepsilon \to 0} g(x_0) \leq s(x_0)$.

Fazit: $s = g$ auf $\mathbb{R}^n$.
$\varphi_k := \max(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$ $(k \in \mathbb{N})$. (φ_k) leistet das Verlangte. ■

Satz 67 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in C(A, \mathbb{R})$ sei auf A beschränkt. Dann gilt $f \in L(A)$.*

Beweis: $f = f^+ - f^-,\ f^+, f^- \in C(A, \mathbb{R}),\ f^+, f^-$ sind auf A beschränkt. Daher o.B.d.A.: $f \geq 0$ auf A.
Sei (φ_k) wie in Satz 66. Sei Q ein Quader mit $A \subseteq Q$ und $\gamma := \sup\{f(x) : x \in A\}$. Dann:

$$\varphi_1 \leq \varphi_k \leq f_A \leq \gamma 1_Q \text{ auf } \mathbb{R}^n \quad (k \in \mathbb{N}).$$

$$\Rightarrow \int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_k dx \leq \int \gamma 1_Q dx = \gamma v_n(Q) \quad (k \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow (\int \varphi_k dx)$ beschränkt. Mit Satz 63 folgt $f_A \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L(A)$. ■

Satz 68 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt und $f \in C(A, \mathbb{R})$. Dann: $f \in L(A)$.*

Beweis: Gr. Übung: $\exists F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$: $F = f$ auf A.
Sei Q ein **offener** Quader mit $A \subseteq Q$. $\bar{Q}$ ist beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow F$ ist auf $\bar{Q}$ beschränkt $\Rightarrow F$ ist auf Q beschränkt $\Rightarrow F\mid_Q \in L(Q) \Rightarrow (F\mid_Q)_Q \in L(\mathbb{R}^n)$.
Es ist $(F\mid_Q)_Q = F_Q$. Also: $F_Q \in L(\mathbb{R}^n)$.

$Q \setminus A$ ist offen und beschränkt $\Rightarrow 1 \in L(Q \setminus A) \Rightarrow 1_{Q\setminus A} \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow F_Q \cdot 1_{Q\setminus A} \in L(\mathbb{R}^n)$.

Es ist $f_A = F_Q - F_Q \cdot 1_{Q\setminus A} \Rightarrow f_A \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L(A)$. ∎

Bez.: $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m\}$.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.
Für $y \in \mathbb{R}^m : A_y := \{x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in A\}$.
Für $x \in \mathbb{R}^n : A_x := \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in A\}$.

Satz 69 Kleiner Satz von Fubini:
$A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ sei beschränkt und offen (bzw. abg.) und es sei $f \in C(A, \mathbb{R})$ beschränkt (also $f \in L(A)$). Dann:
(1) Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ Lebesgue integrierbar über A_y.
(2) Die Funktion $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y)dx$ ist Lebesgue integrierbar über $\mathbb{R}^m$ und

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{A_y} f(x,y)dx)dy.$$

(3) Analog zu (1), (2): $\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{A_x} f(x,y)dy)dx$.

Beweis: Nur für A beschränkt und offen (für A beschränkt und abgeschlossen: ähnlich wie bei Satz 68). O.B.d.A.: $f \geq 0$ auf A $(f = f^+ - f^-)$.
1. Sei (φ_k) eine Folge in τ_{n+m} wie in Satz 66. Wie im Beweis von Satz 67: $(\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi_k(x,y)d(x,y))$ beschränkt. Nach Satz 63 folgt

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} f_A d(x,y) = \lim \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi_k d(x,y).$$

2. Sei $y \in \mathbb{R}^m$ (fest). Für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\psi_k(x) := \varphi_k(x,y), \;\; g(x) := f_A(x,y);$$

für $x \in A_y : \tilde{f}(x) := f(x,y)$. Dann: $g = \tilde{f}_{A_y}$.

Es gilt: $\psi_1 \leq \psi_2 \leq \psi_3 \leq \ldots$ auf $\mathbb{R}^n$, $\psi_k(x) = \varphi_k(x,y) \to f_A(x,y) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Übung: $(\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k dx)$ ist beschränkt.

$$\Rightarrow g \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \tilde{f}_{A_y} \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \;(1)$$

Weiter:

$$\int\limits_{A_y} f(x,y)dx = \int\limits_{A_y} \tilde{f}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)dx.$$

3. $\phi_k(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)dx$ $(y \in \mathbb{R}^m)$. Wie im Beweis von Satz 55 folgt $\phi_k \in \tau_m$.
Es ist $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \ldots$ auf $\mathbb{R}^m$,

$$\phi_k(y) \to_{2.} \int_{A_y} f(x,y)dx \quad (y \in \mathbb{R}^m)$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \phi_k(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)dx)dy$$

$$=_{Satz\ 55} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi_k(x,y)d(x,y) \to_{1.} \int_A f(x,y)d(x,y)$$

$\Rightarrow_{Satz\ 63}$ $y \mapsto \int_{A_y} f(x,y)dx$ ist Lebesgue integrierbar über $\mathbb{R}^m$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (\int\limits_{A_y} f(x,y)dx)dy = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \phi_k(y)dy = \int_A f(x,y)d(x,y).$$

$\blacksquare$

Definition 41 *$A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} (= \mathbb{R}^n)$ heißt einfach bzgl. des 1. Faktors $(\mathbb{R}^{n-1})$ $:\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $A_x = \emptyset$ oder ein Intervall, und $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} (= \mathbb{R}^n)$ heißt einfach bzgl. d. 2. Faktors $(\mathbb{R}^{n-1})$ $:\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $A_y = \emptyset$ oder ein Intervall.*

Aus Satz 69 folgt:

Satz 70 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen und einfach bzgl. des 1. Faktors. Es sei $B := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : A_x \neq \emptyset\}$.*
Dann:
(1) $\forall x \in B$: A_x ist ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$.
(2) $\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_B (\int_{A_x} f(x,y)dy)dx \quad (f \in C(A,\mathbb{R}))$;
und: Sei $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ beschränkt und abgeschlossen und einfach bzgl. des 2. Faktors. Es sei $B := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : A_y \neq \emptyset\}$
Dann:
(1) $\forall y \in B$: A_y ist ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$.
(2) $\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_B (\int_{A_y} f(x,y)dx)dy \quad (f \in C(A,\mathbb{R}))$.

Beispiele: (1) $Q := [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$.
Für $f \in C(Q,\mathbb{R})$:

$$\int_Q f(x)dx = \int_{a_n}^{b_n} (\cdots (\int_{a_2}^{b_2} (\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1)dx_2)\ldots)dx_n.$$

Die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden.
Beispiel: $Q = [0,1] \times [1,2]$.

$$\int_Q xyd(x,y) = \int_1^2 (\int_0^1 xydx)dy = \int_1^2 [\frac{1}{2}x^2y]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2}ydy = [\frac{1}{4}y^2]_1^2 = \frac{3}{4}.$$

(2) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], x^2 \leq y \leq x\}$, $f(x,y) = xy^2$.
A ist einfach bzgl. des 1. Faktors. Es ist $B = [0,1]$ und $A_x = [x^2, x]$ für $x \in B$.

Also:

$$\int_A xy^2 d(x,y) = \int_0^1 (\int_{x^2}^x xy^2 dy)dx = \int_0^1 [\frac{1}{3}xy^3]_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^7)dx = \frac{1}{15} - \frac{1}{24}.$$

(3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\},\ f(x,y) = y$. A ist einfach bzgl. des 1. Faktors. $B = [-1,1]$. Für $x \in B: \ A_x = [0, \sqrt{1-x^2}]$. Also:

$$\int_A yd(x,y) = \int_{-1}^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy)dx = \int_{-1}^1 [\frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-x^2)dx = \int_0^1 (1-x^2)dx = \frac{2}{3}.$$

(4) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\},\ f(x,y,z) = x$. A ist einfach bezgl. des 1. Faktors ($\mathbb{R}^2$). Für $(x,y) \in B: \ A_{(x,y)} = [0, 1-(x+y)]$.
$B = \{(x,y) : x,y \geq 0, x+y \leq 1\}$
Dann:

$$\int_A xd(x,y,z) = \int_B (\int_0^{1-(x+y)} xdz)d(x,y) = \int_B [xz]_{z=0}^{z=1-(x+y)} d(x,y)$$

$$= \int_B x(1-(x+y))d(x,y) = \int_0^1 (\int_0^{1-x} x(1-(x+y))dy)dx = \cdots = \frac{1}{24}.$$

19 Meßbare Mengen mit endlichem Maß

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A heißt **meßbar mit endlichem Maß** (mem): $\Leftrightarrow 1_A \in L(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow 1 \in L(A)$. I. d. Fall heißt

$$v_n(A) := \int_A 1dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A dx$$

das **n-dimensionale Volumen** oder **Lebesguemaß** von A.

Beachte: $v_n(A) \in \mathbb{R}$.

Satz 71 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Ist A offen oder abgeschlossen, so ist A mem..*

Beweis: Folgt aus Satz 67 bzw. Satz 68. ∎

Beispiele:
(1) $\emptyset$ ist mem. und $v_n(\emptyset) = 0$.
(2) Sei Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$. Aus Kapitel 18: $\tau_n \subseteq L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow 1_Q \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow Q$ ist mem. Das n-dimensionales Volumen von Q aus Def. 35 ist obiges n-dimensionales Volumen von Q.
(3) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen, $f \in C(D, \mathbb{R})$ und $f \geq 0$ auf D.

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Übung: A ist beschränkt und abgeschlossen. Aus Satz 71 folgt: A ist mem. im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Es gilt:

$$v_{n+1}(A) = \int_A 1 d(x, y) = \int_D (\int_0^{f(x)} 1 dy) dx = \int_D f(x) dx.$$

(4) Sei $r > 0$ und $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\} = \overline{U_r(0)}$
Aus Satz 71: A ist mem.

$$v_2(A) = \int_{-r}^{r} (\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 dy) dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = \pi r^2.$$

Satz 72 *$A_1, \ldots, A_m, A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ seien mem. Dann gilt: (1) $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ sind mem. und*

$$v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B)$$

(2) $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ ist mem. und

$$v_n(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \leq v_n(A_1) + \cdot + v_n(A_m)$$

(3) Aus $A \subseteq B$ folgt $v_n(A) \leq v_n(B)$.

Beweis: (2) folgt aus (1) mit Induktion.
(1) $1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B \Rightarrow 1_{A\cap B} \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \cap B$ ist mem.
$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B} \Rightarrow 1_{A\cup B} \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \cup B$ ist mem.
Weiter:

$$v_n(A \cup B) = \int 1_{A\cup B} dx = \int 1_A dx + \int 1_B dx - \int 1_{A\cap B} dx$$
$$= v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B).$$
$$1_{A\setminus B} = 1_A(1 - 1_B) \Rightarrow 1_{A\setminus B} \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \setminus B$$

ist mem.
(3) $A \subseteq B \Rightarrow 1_A \leq 1_B$ auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow \int 1_A dx \leq \int 1_B dx \Rightarrow$ Behauptung. ∎

Satz 73 Das Prinzip von Cavalieri.
$A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \{(x,z) : x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}\}$ sei beschränkt und abgeschlossen (also mem. in $\mathbb{R}^{n+1}$). Dann:
(1) $\forall z \in \mathbb{R}$ ist A_z beschränkt und abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ (also mem. in $\mathbb{R}^n$).
(2) $v_{n+1}(A) = \int_{\mathbb{R}} v_n(A_z) dz$

Beweis: (1) Übung!
(2)
$$v_{n+1}(A) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} 1_A d(x,z) = \int_A 1 d(x,z)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (\int_{A_z} 1 dx) dz = \int_{\mathbb{R}} v_n(A_z) dz.$$

∎

Beispiele:
(1) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1], x^2 + y^2 \leq z^2\}$
Für $z \notin [0,1] : A_z = \emptyset$.
Für $z \in [0,1] : A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2\}$ (Kreisscheibe mit Radius z)

$\Rightarrow v_2(A_z) = \pi z^2 \Rightarrow v_3(A) = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{1}{3}\pi$.
(2) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R},\ f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und $f \geq 0$ auf $[a,b]$.

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Anschauung: Graph von f rotiert um die x-Achse. Man sagt: A ist ein Rotationskörper. A ist beschränkt und abgeschlossen.
$x \notin [a,b] : A_x = \emptyset$.
$x \in [a,b] : A_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\} \Rightarrow v_2(A_x) = \pi f(x)^2 \Rightarrow v_3(A) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$.
Speziell: $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(r > 0,\ x \in [-r,r])$
Dann: $A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\} = \overline{U_r(0)} \subseteq \mathbb{R}^3$.
$v_3(A) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2)dx = \pi[r^2 x - \frac{1}{3}x^3]_{-r}^r = \pi(r^3 - \frac{1}{3}r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Definition 42 *Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$. N heißt eine Nullmenge: $\Leftrightarrow$ N ist mem. und $v_n(N) = 0$.*

Satz 74 *Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$. N ist eine Nullmenge $\Leftrightarrow \|1_N\|_1 = 0$.*

Beweis: "$\Rightarrow$" : N Nullmenge $\Rightarrow 1_N \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \|1_N\|_1 = \int 1_N dx = v_n(N) = 0$.
"$\Leftarrow$": Sei $(\varphi_k) = (0,0,0,\dots) \Rightarrow (\varphi_k)$ ist eine Folge in τ_n und $\|1_N - \varphi_k\|_1 = \|1_N\|_1 = 0$ $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow$
$1_N \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int 1_N dx = \lim \int \varphi_k dx = 0 \Rightarrow N$ ist mem. und $v_n(N) = 0$. ■

Satz 75 *$N, N_1, N_2, \dots$ seien Nullmengen im $\mathbb{R}^n$. Dann:*
(1) $\bigcup_{k=1}^\infty N_k$ ist eine Nullmenge.
(2) Ist $M \subseteq N \Rightarrow M$ ist eine Nullmenge.

Beweis: (1)

$$A := \bigcup_{k=1}^\infty N_k \Rightarrow 1_A \leq \sum_{k=1}^\infty 1_{N_K}$$

$$\Rightarrow \|1_A\|_1 \leq \sum_{k=1}^\infty \|1_{N_k}\|_1 = 0 \Rightarrow \|1_A\|_1 = 0.$$

Hieraus fogt die Behauptung.
(2) $1_M \leq 1_N \Rightarrow \|1_M\|_1 \leq \|1_N\|_1 = 0 \Rightarrow$ Behauptung ■

Beispiele:
(1) Sei $x_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, N := \{x_0\}$. N ist ein (entarteter) Quader, $N = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_n\} \Rightarrow N$ ist mem. und $v_n(N) = 0 \Rightarrow N$ ist eine Nullmenge.
(2) Aus Beispiel (1) und Satz 75 (1): Jede abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.
(3) Sei $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$.
Q ist eine Nullmengen $\Leftrightarrow a_j = b_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Satz 76 *$\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei beschränkt und abgeschlossen. Es sei $f \in C(D, \mathbb{R})$ und $G_f := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.*
Dann ist G_f eine Nullmenge (im $\mathbb{R}^{n+1}$).

Beweis: Übung: G_f ist beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow G_f$ ist mem.

$$v_{n+1}(G_f) = \int_{G_f} 1 d(x, y) = \int_D (\int_{f(x)}^{f(x)} 1 dy) dx = 0.$$

■

Definition 43 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und (E) eine Eigenschaft, welche die Elemente von A betrifft.*
(E) **gilt fast überall (f.ü.) auf** *A: $\Leftrightarrow \exists$ Nullmenge $N \subseteq A$ mit: (E) gilt für alle $x \in A \setminus N$.*

Beispiel: Sei $f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ eine Funktion. $f = 0$ f.ü. auf $A \Leftrightarrow \exists$ Nullmenge $N \subseteq A : f(x) = 0 (x \in A \setminus N)$.

Satz 77 *(1) $f, g : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ seien Funktionen und es gelte $f = g$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n$. Dann: $f \in L(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow g \in L(\mathbb{R}^n)$. I. d. Fall: $\int f dx = \int g dx$.*

(2) Sei $A, B \subseteq \mathbb{R}^n, f \in L(A) \cap L(B)$ und $A \cap B$ sei eine Nullmenge. Dann: $f \in L(A \cup B)$ und

$$\int_{A\cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx$$

Beweis: (1) $\exists$ Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\ (x \notin N)$.
Sei $f \in L(\mathbb{R}^n)$. $\exists$ Folge (φ_k) in τ_n mit: $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$ und $\int \varphi_k dx \to \int f dx$.
$f_k := 1_N\ (k \in \mathbb{N})$ und $h := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$. Es gilt

$$\|h\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 = 0 \Rightarrow \|h\|_1 = 0.$$

Es ist

$$|g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + h \text{ auf } \mathbb{R}^n.$$

Damit:

$$\|g - \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|h\|_1 = \|f - \varphi_k\|_1 \to 0$$

$\Rightarrow g \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int g dx = \lim \int \varphi_k dx = \int f dx$.
(2) Wegen (1): o.B.d.A.: $f = 0$ auf $A \cap B$. Dann: $f_{A\cup B} = f_A + f_B \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L(A \cup B)$ und

$$\int_{A\cup B} f dx = \int f_{A\cup B} dx = \int f_A dx + \int f_B dx = \int_A f dx + \int_B f dx.$$

■

Satz 78 *$f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ sei eine Funktion.*
(1) Ist $\|f\|_1 < \infty \Rightarrow N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\}$ ist eine Nullmengen. **Beachte:** *Ist $f \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \|f\|_1 < \infty$.*
(2) $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ f. ü. auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis: (1) Sei $\varepsilon > 0$. Dann: $1_N \leq \varepsilon|f|$ auf $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \|1_N\|_1 \leq \varepsilon\|f\|_1 \Rightarrow_{\varepsilon\to 0} \|1_N\|_1 = 0$$

$\Rightarrow$ Behauptung.
(2) "$\Rightarrow$": Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$N_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Es ist $1_{N_k} \leq k|f|$ auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow \|1_{N_k}\|_1 \leq k\|f\|_1 = 0 \Rightarrow N_k$ ist eine Nullmenge. Damit: $N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ ist eine Nullmenge. Es ist $N = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$.
"$\Leftarrow$": Es ist $|f| = 0$ f. ü. auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow |f| \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int |f| dx = \int 0 dx = 0 \Rightarrow \|f\|_1 = \int |f| dx = 0$. ∎

Definition 44 *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine Figur: $\Leftrightarrow$ $\exists$ abgeschlossene Quader $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m \subseteq \mathbb{R}^n : A = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$.*

Satz 79 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann existieren Figuren $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mit:*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \text{ und } U = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \qquad (*)$$

Ist zusätzlich U mem., so ist

$$v_n(U) = \lim_{k\to\infty} v_n(A_k) = \sup\{v_n(A_k) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis: Für $a \in \mathbb{Q}^n$ und $r \in \mathbb{Q}^+$ sei $W_r(a)$ wie im Beweis von Satz 66.

$$\mathcal{A} := \{W_r(a) : W_r(a) \subseteq U,\ a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$$

U offen $\Rightarrow \mathcal{A} \neq \emptyset$. Es ist $\mathcal{A} = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$
Setze $A_k := Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Dann gilt $(*)$

Sei U mem. $\varphi_k := 1_{A_k}$

$$\Rightarrow \varphi_k \in \tau_n, \quad \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots$$

auf $\mathbb{R}^n$,

$$\varphi_k(x) \to_{(*)} 1_U(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Weiter $\varphi_1 \leq \varphi_k \leq 1_U$ auf $\mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_k dx \leq \int 1_U dx = v_n(U)$. Somit (vgl. Satz 63):

$$\int 1_U dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k dx \Rightarrow v_n(U) = \lim_{k\to\infty} v_n(A_k).$$

■

Satz 80 *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen. Dann existieren Quader $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ mit:*

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,\ \ Q_k^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset\ (j \neq k).$$

Ist zusätzlich U mem., so ist $v_n(U) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k)$.

Beweis: In den Übungen.

Satz 81 *Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$. N ist eine Nullmenge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ Quader $Q_1, Q_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^n$ mit:*

$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \varepsilon \qquad (+)$$

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0$. $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ seien wie in (+). Dann: $1_N \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} 1_{Q_k}$ auf $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \|1_N\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{Q_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) <_{(+)} \varepsilon.$$

$\Rightarrow_{\varepsilon\to 0} \|1_N\|_1 = 0 \Rightarrow N$ ist eine Nullmenge.
"$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon > 0$. Wegen Satz 80 genügt es zu zeigen:
$\exists U \subseteq \mathbb{R}^n : U$ ist offen, U ist mem., $N \subseteq U$ und $v_n(U) < \varepsilon$.

Es gilt: $\|2 \cdot 1_N\|_1 = 2\|1_N\|_1 = 0$.

$$\exists \phi \in \mathcal{H}(2 \cdot 1_N) : I(\phi) < \varepsilon.$$

Sei $\phi = \sum_k c_k 1_{R_k}$, wobei $c_k \geq 0$ und R_k offene Quader.
O.B.d.A.:

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{R_k}, \quad \varphi_m := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{R_k} \quad (m \in \mathbb{N})$$

Dann: $\varphi_m \in \tau_n$, $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \dots$ auf $\mathbb{R}^n$, $\varphi_k(x) \to \phi(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ und

$$\int \varphi_1 dx \leq \int \varphi_m dx = \sum_{k=1}^{m} c_k v_n(R_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_n(R_k) = I(\phi) < \varepsilon.$$

Somit: $\phi \in L(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int \phi dx = \lim \int \varphi_m dx = I(\phi) < \varepsilon.$$

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) > 1\}$.
Sei $x \in N \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1_N(x) \leq \phi(x) \Rightarrow x \in U$, also: $N \subseteq U$.

Sei $x_0 \in U$. Dann:

$$\phi(x_0) > 1 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \varphi_m(x_0) > 1.$$

$$V := \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq m \\ x_0 \in R_j}} R_j.$$

$\varphi_m(x_0) > 0 \Rightarrow V \neq \emptyset$. Klar: $x_0 \in V$; R_j offen $\Rightarrow V$ ist offen.

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq V$.

Sei $x \in V$

$$\Rightarrow \varphi_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{R_k}(x) \geq \varphi_m(x_0) > 1$$

$\Rightarrow \phi(x) > 1 \Rightarrow x \in U$. Also: $V \subseteq U$. Dann: $U_\delta(x_0) \subseteq U$. U ist also offen.

$1 \in C(U, \mathbb{R}) \Rightarrow_{Satz\ 66} \exists$ Folge (ψ_k) in τ_n mit:
$\psi_1 \leq \psi_2 \leq \ldots$ auf $\mathbb{R}^n$, $\psi_k(x) \to 1_U(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, somit
$\psi_1 \leq \psi_k \leq 1_U \leq \phi$ auf $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \int \psi_1 dx \leq \int \psi_k dx \leq \int \phi dx < \varepsilon \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Damit:

$$1_U \in L(\mathbb{R}^n), \quad \int 1_U dx = \lim \int \psi_k dx \leq \int \phi dx < \varepsilon.$$

Also: U ist mem. und $v_n(U) < \varepsilon$. ■

Folgerung: Ist $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$, so existiert eine offene Menge U mem., mit $N \subseteq U$ und $v_n(U) < \varepsilon$.

Satz 82 *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei beschränkt und abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ sei beschränkt auf A und f.ü. stetig auf A. Dann: $f \in L(A)$.*

Beweis: $\exists \gamma \geq 0 : |f| \leq \gamma$ auf A. $\exists$ Nullmenge $N \subseteq A : f$ ist stetig in jedem $x \in A \setminus N$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann: $\exists U \subseteq \mathbb{R}^n : U$ ist offen u. mem, $N \subseteq U$ und $v_n(U) < \varepsilon$. Es gilt: $A \setminus U \subseteq A \setminus N$ und $A \setminus U$ ist beschränkt und abgeschlossen

$$\Rightarrow f \in L(A \setminus U) \Rightarrow f_{A \setminus U} \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists \varphi \in \tau_n : \|f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 < \varepsilon.$$

Es ist

$$|f_A - f_{A \setminus U}| \leq \gamma 1_U \Rightarrow \|f_A - f_{A \setminus U}\|_1 \leq \gamma \|1_U\|_1$$
$$= \gamma \int 1_U dx = \gamma v_n(U) < \gamma \varepsilon$$
$$\Rightarrow \|f_A - \varphi\|_1 = \|f_A - f_{A \setminus U} + f_{A \setminus U} - \varphi\|_1$$
$$\leq \|f_A - f_{A \setminus U}\|_1 + \|f_{A \setminus U} - \varphi\|_1 < \varepsilon\gamma + \varepsilon = \varepsilon(\gamma + 1)$$

Also: $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \tau_n : \|f_A - \varphi\|_1 < \varepsilon$.
Somit: $f_A \in L(\mathbb{R}^n)$, also $f \in L(A)$. ■

20 Konvergenzsätze

Definition 45 *Es seien $f, f_1, f_2, \dots : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ Funktionen.*
*(1) (f_k) heißt L^1-***konvergent gegen** *f: $\Leftrightarrow$*

$$\|f - f_k\|_1 \to 0 \ (k \to \infty).$$

*(2) (f_k) heißt eine L^1-***Cauchyfolge***: $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$:*

$$\|f_k - f_l\|_1 < \varepsilon \quad (k, l \geq k_0).$$

Bem.: Ist (f_k) L^1-konvergent gegen f, so ist (f_k) eine L^1-Cauchyfolge:

$$\|f_k - f_l\|_1 = \|f_k - f + f - f_l\|_1 \leq \|f - f_k\|_1 + \|f - f_l\|_1.$$

Satz 83 Satz von Riesz-Fischer:
(f_k) sei eine L^1-Cauchyfolge und es sei $f_k \in L(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{N})$. Dann existiert ein $f \in L(\mathbb{R}^n)$:
(1) $\|f - f_k\|_1 \to 0$ $(k \to \infty)$
(2) $\int f dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k dx$;
(3) (f_k) enthält eine Teilfolge, welche f.ü. auf $\mathbb{R}^n$ punktweise gegen f konvergiert.

Ohne Beweis.

Satz 84 Satz von Beppo Levi: *(f_k) sei eine Folge in $L(\mathbb{R}^n)$ mit $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ auf $\mathbb{R}^n$ und $(\int f_k dx)$ beschränkt. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \tilde{\mathbb{R}}$ definiert durch*

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x),$$

so gilt $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k dx$.

Beweis: $(\int f_k dx)$ ist beschränkt und monoton, also konvergent.
Für $k \geq l$:

$$\|f_k - f_l\|_1 = \int |f_k - f_l| dx = \int (f_k - f_l) dx = |\int f_k dx - \int f_l dx|$$

Also: (f_k) ist eine L^1-Cauchyfolge

$$\Rightarrow \exists g \in L(\mathbb{R}^n) : \int g dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k dx$$

und (f_k) enthält eine TF $(f_{k\nu})$: $(f_{k\nu})$ konvergiert auf $\mathbb{R}^n$ f.ü. punktweise gegen g. Somit: $f = g$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow_{Satz\ 77} f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \int g dx = \lim \int f_k dx$. ■

Definition 46 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und (A_k) eine Folge von Teilmengen von A mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A$ und $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann heißt (A_k) eine* **Ausschöpfung von** *A.*

Satz 85 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und (A_k) eine Ausschöpfung von A. $f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ sei eine Funktion mit $f \in L(A_k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Dann:*

$$f \in L(A) \Leftrightarrow \left(\int_{A_k} |f| dx\right) \text{ ist beschränkt.}$$

I.d. Fall: $\int_A f dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f dx$.

Beweis: "$\Rightarrow$": Nach Satz 64: $|f| \in L(A), |f| \in L(A_k)$ $(k \in \mathbb{N})$.

$$A_k \subseteq A \Rightarrow 0 \leq |f|_{A_k} \leq |f|_A \Rightarrow$$

$$0 \leq \int_{A_k} |f| dx = \int |f|_{A_k} dx \leq \int |f|_A dx = \int_A |f| dx \ (k \in \mathbb{N}).$$

"$\Leftarrow$" : O.B.d.A. $f \geq 0$ auf A $(f = f^+ - f^-,\ |f| = f^+ + f^-)$.
Es ist $0 \leq f_{A_1} \leq f_{A_2} \leq \cdots \leq f_A$ auf $\mathbb{R}^n$ und $f_{A_k}(x) \to f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

$$0 \leq \int f_{A_k} dx = \int_{A_k} f dx$$

$\Rightarrow (\int f_{A_k} dx)$ beschränkt. Nach Satz 84: $f_A \in L(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int f_A dx = \lim_{k\to\infty} \int f_{A_k} dx$$

$\Rightarrow f \in L(A)$ und $\int_A f dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f dx$. ■

Satz 86 Vergleich: uneigentl. R-Int. $\leftrightarrow$ L-Integral.
Es sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \in R([a,t])$ $(t > a)$. Dann:

$$f \in L([a,\infty)) \Leftrightarrow \int_a^{\infty} f dx$$

konvergiert **absolut**.
I.d. Fall: $\int_{[a,\infty)} f dx = \int_a^\infty f dx$
Entsprechendes gilt für andere Typen uneigentlicher Integrale.

Beweis: Sei (t_k) eine Folge in $[a,\infty)$ mit $t_1 < t_2 < \dots$ und $t_k \to \infty$ $(k \to \infty)$. $A_k := [a, t_k]$ $(k \in \mathbb{N})$, $A := [a,\infty)$. Dann ist (A_k) eine Ausschöpfung von A.
Für $k \in \mathbb{N}$:

$$I_k := \int_a^{t_k} f dx, \; J_k := \int_a^{t_k} |f| dx$$

(R-Integrale!).
Es gilt: $f, |f| \in L(A_k)$, $I_k = \int_{A_k} f dx$ und $J_k = \int_{A_k} |f| dx$ $(k \in \mathbb{N})$.
Weiter gilt (nach Satz 85): $f \in L(A) \Leftrightarrow (J_k)$ ist beschränkt $\Leftrightarrow (J_k)$ konvergiert $\Leftrightarrow \int_a^\infty |f| dx$ konvergiert.
I.d. Fall:
$\int_A f dx = \lim_{k\to\infty} I_k = \int_a^\infty f dx$. ■

Beispiele:
(1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\int_0^1 f(x) dx$ konvergiert (absolut), aber $\int_0^1 f^2(x) dx$ divergiert. Somit: $f \in L([0,1])$, $f^2 \notin L([0,1])$.
(2)

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Hier gilt: $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergiert, aber $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergiert **nicht** absolut $\Rightarrow f \notin L([0,\infty))$.
Aber: $\int_0^\infty f dx$ existiert im uneigentlichen Riemann-Sinne.

Satz 87 $(A_k), (B_k)$ *seien Folgen von Mengen im* $\mathbb{R}^n$ *mem..*
(1) Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ *und* $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$*, so gilt:*

$$A \text{ ist mem. } \Leftrightarrow (v_n(A_k)) \text{ ist beschränkt}$$

I. d. Fall: $v_n(A) = \lim_{k\to\infty} v_n(A_k)$.

(2) Für $j \neq k$ *sei* $B_j \cap B_k$ *jeweils eine Nullmenge. Dann gilt für* $B := \bigcup_{k=1}^\infty B_k$*:*

$$B \text{ ist mem } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty v_n(B_k) \text{ konvergiert.}$$

Beweis: (1) folgt aus Satz 85 mit $f = 1$ auf A.
(2) $\tilde{A}_k := B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Satz 72 $\Rightarrow$ $\tilde{A}_k$ ist mem. und $v_n(\tilde{A}_k) = v_n(B_1) + \cdots + v_n(B_k)$.
Es ist $\tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2 \subseteq \ldots$ und $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$. Nach (1): B ist mem. $\Leftrightarrow$ $(v_n(\tilde{A}_k)) = \left(\sum_{j=1}^{k} v_n(B_j)\right)$ ist beschränkt $\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty} v_n(B_j)$ konv.
I. d. Fall: $v_n(B) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} v_n(B_j)$. ∎

Satz 88 *(Satz von Lebesgue über Majorisierte Konvergenz).*
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, (f_k) eine Folge in $L(A)$ und (f_k) konvergiere f.ü. auf A punktweise gegen $f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$.
(1) Ist $F \in L(A)$ und $|f_k| \leq F$ auf A $(k \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow$ $f \in L(A)$ und

$$\int_A f dx = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k dx.$$

(2) Ist A mem. und existiert ein $M \geq 0$ mit $|f_k| \leq M$ auf A $(k \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow$ $f \in L(A)$ und

$$\int_A f dx = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k dx.$$

Beweis: (2) folgt auf (1): $F := M$ auf A. Es gilt: A mem. $\Rightarrow 1 \in L(A) \Rightarrow F \in L(A)$.
(1) O.B.d.A.: $A = \mathbb{R}^n$ (Übergang $f \to f_A$).
$\exists$ Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ mit: Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ gilt

$$F(x) \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) \in \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{N}), \quad f_k(x) \to f(x)\ (k \to \infty).$$

Damit gilt auch $f(x) \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R}^n \setminus N)$.
Wegen Satz 77 können wir abändern:

$$f(x) := f_k(x) := F(x) := 0 \text{ für } x \in N,\ k \in \mathbb{N}.$$

Dann: $f_k(x) \to f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ und $|f_k| \leq F$ auf $\mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$.

Für $k, \nu \in \mathbb{N}$:

$$g_k(x) := \sup\{f_j(x) : j \geq k\} \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

$$g_{k,\nu}(x) := \max\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots, f_{k+\nu}(x)\} \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Dann: $|g_k|, |g_{k,\nu}| \le F$ auf $\mathbb{R}^n$.
Es gilt: $g_{k,\nu} \in L(\mathbb{R}^n)$. Sei $k \in \mathbb{N}$ (fest). Es ist

$$g_{k,1} \le g_{k,2} \le g_{k,3} \le \dots$$

auf $\mathbb{R}^n$;

$$\left|\int g_{k,\nu} dx\right| \le \int |g_{k,\nu}| dx \le \int F dx$$

$\Rightarrow (\int g_{k,\nu} dx)_\nu$ ist beschränkt.
Weiter gilt: $g_{k,\nu}(x) \to_{\nu\to\infty} g_k(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Satz v. Beppo Levi $\Rightarrow g_k \in L(\mathbb{R}^n)$.

Es ist $g_1 \ge g_2 \ge g_3 \ge \dots$ auf $\mathbb{R}^n$;

$$\left|\int g_k dx\right| \le \int |g_k| dx \le \int F dx$$

$\Rightarrow (\int g_k dx)$ beschränkt. Weiter gilt: $g_k(x) \to f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Satz v. Beppo Levi: $\Rightarrow f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \lim_{k\to\infty} \int g_k dx$.

$$h_k(x) := \inf\{f_j(x) : j \ge k\} \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Wie oben: $h_k \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\int f dx = \lim_{k\to\infty} \int h_k dx$.

Es ist $h_k \le f_k \le g_k$ auf $\mathbb{R}^n$. Somit:

$$\int h_k dx \le \int f_k dx \le \int g_k dx \Rightarrow_{k\to\infty} \int f dx = \lim \int f_k dx.$$

■

Beispiel: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : [1,k] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) = \frac{k^3 x \sin(\frac{x}{k})}{(1+kx^2)^2}.$$

Berechne $\lim\limits_{k\to\infty} \int_1^k f_k(x) dx$.

Def. $g_k : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$g_k(x) := \begin{cases} f_k(x), & x \in [1,k] \\ 0, & x > k \end{cases}$$

$f_k \in R([1,k]) \Rightarrow_{Satz\ 65} f_k \in L([1,k]) \Rightarrow g_k \in L([1,\infty))$ und

$$\int_{[1,\infty)} g_k dx = \int_{[1,k]} g_k dx = \int_1^k f_k(x)dx.$$

Sei $x \in [1,\infty)$. $\exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in [1,k]$ $(k \geq k_0)$. Für $k \geq k_0$:

$$g_k(x) = f_k(x) = \frac{\sin\frac{x}{k}}{\frac{x}{k}} \cdot \frac{k^2x^2}{(1+kx^2)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{kx}+x\right)^2} \cdot \frac{\sin\frac{x}{k}}{\frac{x}{k}}$$

$\to \frac{1}{x^2} =: f(x)$ $(k \to \infty)$. Also: $g_k(x) \to f(x)$ $(x \in [1,\infty))$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ konvergiert absolut. Nach Satz 86 gilt $f \in L([1,\infty))$ und

$$\int_{[1,\infty)} f dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Weiter ist

$$|g_k(x)| \leq \frac{\left|\sin\frac{x}{k}\right|}{\frac{x}{k}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{kx}+x\right)^2} \leq f(x) \quad (x \in [1,\infty)).$$

Mit Satz 88 folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k f_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[1,\infty)} g_k dx = \int_{[1,\infty)} f dx = 1.$$

Erinnerung:
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ differenzierbar und $f' \in R([a,b])$.
Dann:

$$\int_a^b f' dx = f(b) - f(a).$$

Version des Hauptsatzes für das L-Integral:

Satz 89 *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ db und f' sei auf $[a,b]$ beschränkt. Dann: $f' \in L([a,b])$ und*

$$\int_{[a,b]} f' dx = f(b) - f(a).$$

Beweis: $M := \sup\{|f'(x)| : x \in [a,b]\}$. Für $k \geq k_0$:

$$f_k(x) := \begin{cases} \frac{f(x+\frac{1}{k})-f(x)}{\frac{1}{k}}, & x \in [a, b-\frac{1}{k}] \\ 0, & x \in (b-\frac{1}{k}, b] \end{cases}$$

Es gilt: $f_k \in R([a,b]) \Rightarrow f_k \in L([a,b])$

Für $x \in [a, b-\frac{1}{k}]$:

$$|f(x+\frac{1}{k}) - f(x)| = |f'(\xi)\frac{1}{k}| \leq M\frac{1}{k} \Rightarrow |f_k(x)| \leq M.$$

Fazit: $|f_k| \leq M$ auf $[a,b]$ $(k \geq k_0)$.
Sei $x \in [a,b) \Rightarrow \exists k_1 \geq k_0 : x \in [a, b-\frac{1}{k}] (k \geq k_1)$

$$\Rightarrow f_k(x) = \frac{f(x+\frac{1}{k}) - f(x)}{\frac{1}{k}} \to f'(x) \quad (k \to \infty).$$

Also:

$$f_k(x) \to g(x) := \begin{cases} f'(x), & x \in [a,b) \\ 0, & x = b \end{cases}$$

Nach Satz 88(2): $g \in L([a,b])$ und

$$\int_{[a,b]} g(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} f_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

Wegen $f' = g$ f.ü. auf $[a,b]$ folgt $f' \in L([a,b])$ und

$$\int_{[a,b]} f'dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

f ist stetig auf $[a,b] \Rightarrow f$ besitzt auf $[a,b]$ eine Stammfunktion F.
Nachrechnen:

$$\int_a^b f_k(x)dx = \frac{F(b) - F(b-\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} - \frac{F(a+\frac{1}{k}) - F(a)}{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow_{k\to\infty} \int_{[a,b]} f'dx = F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a).$$

■

21 Meßbare Mengen und meßbare Funktionen.

Definition 47 *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* **(Lebesgue-)***meßbar (mb): $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge von Mengen (A_k) mit A_k mem. $(k \in \mathbb{N})$ und $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.*

$$\mathcal{L}_n := \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ ist mb}\}$$

Beachte: A mem. $\Rightarrow A \in \mathcal{L}_n$.

Die Abbildung $\lambda_n : \mathcal{L}_n \to \tilde{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$\lambda_n(A) := \begin{cases} v_n(A), & \text{falls } A \text{ mem.} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ nicht mem.} \end{cases}$$

heißt n**-dimensionales Lebesguemaß**.

Beispiele:
$\mathbb{R}^n \in \mathcal{L}_n,\ \lambda_n(\mathbb{R}^n) = \infty;\ \emptyset \in \mathcal{L}_n,\ \lambda_n(\emptyset) = 0.$

Satz 90 *Es seien $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}_n$.*
(1) $A \setminus B,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{L}_n$.
(2) Sei $B \subseteq A$.
(i) $\lambda_n(B) \leq \lambda_n(A)$
(ii) *Ist B mem. $\Rightarrow \lambda_n(A \setminus B) = \lambda_n(A) - \lambda_n(B)$*
(3) $\lambda_n(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$
(4) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ folgt $\lambda_n(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim\limits_{j\to\infty} \lambda_n(A_j)$
(5) Aus A_1 mem. und $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ folgt $\lambda_n(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim\limits_{j\to\infty} \lambda_n(A_j)$
(6) Ist $A_j \cap A_k = \emptyset$ $(j \neq k) \Rightarrow \lambda_n(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_n(A_j)$

Ohne Beweis.
Folgerung.
(1) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow A \in \mathcal{L}_n$

(2) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\Rightarrow A \in \mathcal{L}_n$

Beweis:
(1) folgt aus Satz 80
(2) A abgeschlossen $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ offen $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{L}_n \Rightarrow A \in \mathcal{L}_n$.
■

Definition 48 *Sei $A \in \mathcal{L}_n$ und $f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ eine Funktion. f heißt meßbar: $\Leftrightarrow$ $\exists$ Folge (φ_k) in τ_n : (φ_k) konv. f.ü. auf $\mathbb{R}^n$ punktweise gegen f_A.*

Satz 91 *Sei $A \in \mathcal{L}_n$ und $f, g : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ Funktionen.*
(1) Ist $f \in L(A) \Rightarrow f$ ist meßbar.
(2) Sind f, g meßbar $c \in \mathbb{R}$ und $p > 0 \Rightarrow f + g$, fg, cf, f^+, f^-, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ und $|f|^p$ sind meßbar ($\infty^p := \infty$).

Ohne Beweis.

22 Der Satz von Fubini - Substitutionsregel

Die beiden folgenden Sätze geben wir **ohne** Beweise an.

Satz 92 ($\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\}$).
Es sei $f \in L(\mathbb{R}^{n+m})$.
(1) $\exists$ Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^m$: Für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$ ist die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ in $L(\mathbb{R}^n)$.
(2) Für
$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)dx, & y \in \mathbb{R}^m \setminus N \\ 0, & y \in N \end{cases}$$
gilt: $F \in L(\mathbb{R}^m)$ und $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x, y)d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} F(y)dy$.

Satz 93 *(Substitutionsregel)*
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt, ∂U sei eine Nullmenge und $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ sei auf U injektiv und Lipschitzstetig. Es sei $B := \overline{U}$ (bea.: B ist abgeschlossen und beschränkt).

Dann läßt sich ϕ Lipschitz-stetig auf B fortsetzen und mit $A := \phi(B)$ gilt:
A ist beschränkt und abgeschlossen und

$$\int_A f(x)dx = \int_B f(\phi(y))|\det \phi'(y)|dy \quad (f \in C(A, \mathbb{R})).$$

Beachte: I. a. ist ϕ' auf der Nullmenge ∂U nicht erklärt!

Polarkoordinaten $(n = 2)$
$r = \|(x, y)\| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$
$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$
$\phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$
$(r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi]); \det \phi'(r, \varphi) = r$

Beispiele:
(1) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\},\ f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$
$B = [0, 1] \times [0, \pi] \Rightarrow A = \phi(B)$.

$$\int_A f(x, y)d(x, y) = \int_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd(r, \varphi)$$
$$= \int_B r^3 \sin\varphi d(r, \varphi) = \int_0^\pi (\int_0^1 r^3 \sin\varphi dr)d\varphi$$
$$= \int_0^\pi [\frac{1}{4}r^4 \sin\varphi]_{r=0}^{r=1} d\varphi = \int_0^\pi \frac{1}{4}\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2}.$$

(2) Beh.: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

Beweis: Sei $\rho > 0$ und $Q_\rho := [0, \rho] \times [0, \rho]$.
$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2}e^{-y^2}$

$$\Rightarrow \int_{Q_\rho} fd(x, y) = \int_0^\rho (\int_0^\rho e^{-x^2}e^{-y^2}dx)dy = (\int_0^\rho e^{-x^2}dx)^2$$

$A_\rho := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \rho, x, y \geq 0\}$
$B_\rho := [0, \rho] \times [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \phi(B_\rho) = A_\rho \Rightarrow$

$$\int_{A_\rho} fd(x, y) = \int_{B_\rho} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd(r, \varphi)$$

$$= \int_{B_\rho} re^{-r^2} d(r,\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^\rho re^{-r^2} dr) d\varphi$$
$$= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=\rho} = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} + \frac{1}{2} \right) =: h(\rho).$$

Es ist $A_\rho \subseteq Q_\rho \subseteq A_{\sqrt{2}\rho} \Rightarrow_{f \geq 0} f_{A_\rho} \leq f_{Q_\rho} \leq f_{A_{\sqrt{2}\rho}}$

$$\Rightarrow h(\rho) \leq (\int_0^\rho e^{-x^2} dx)^2 \leq h(\sqrt{2}\rho)$$
$$\Rightarrow_{\rho \to \infty} \frac{\pi}{4} = (\int_0^\infty e^{-x^2} dx)^2 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

■

Zylinderkoordinaten ($n = 3$).

$\phi(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), r \geq 0, \varphi \in [0,2\pi], z \in \mathbb{R}$.
$\det \phi'(r,\varphi,z) = r$.

Beispiel: $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x,y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$
$f(x,y,z) = y\sqrt{x^2+y^2} + z$.
$B = [0,1] \times [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,1] \Rightarrow \phi(B) = A$.

$$\int_A f(x,y,z) d(x,y,z) = \int_B (r^2 \sin\varphi + z) r d(r,\varphi,z) =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 (r^3 \sin\varphi + rz) dr \right) d\varphi \right) dz = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

Kugelkoordinaten ($n = 3$).

$r = \|(x,y,z)\| = (x^2 + x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$
$x = r\cos\varphi\sin\vartheta$
$y = r\sin\varphi\sin\vartheta$
$z = r\cos\vartheta$
$r \geq 0, \varphi \in [0,2\pi], \vartheta \in [0,\pi]$.

$\phi(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$
$\det\phi'(r,\varphi,\vartheta) = -r^2\sin\vartheta.$

Beispiel:
$A : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \|(x,y,z)\| \le 2, x,y,z \ge 0\}$
$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$
$B = [1,2] \times [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \phi(B) = A.$

$$\int_A f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_B \frac{1}{r^2} r^2 \sin\vartheta d(r,\varphi,\vartheta)$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta\right) d\varphi\right) dr = \frac{\pi}{2}.$$

23 Parameterabhängige Integrale

Satz 94 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m, A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$.*
Es sei $f : A \times B \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit:
(1) Für jedes $x \in A$ ist $y \mapsto f(x,y)$ in $L(B)$.
(2) Für jedes $y \in B$ ist $x \mapsto f(x,y)$ in $C(A,\mathbb{R})$.
(3) $\exists \phi \in L(B) : |f(x,y)| \le \phi(y)$ $((x,y) \in A \times B)$.
$F : A \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) := \int_B f(x,y)dy$. Dann gilt: $F \in C(A,\mathbb{R})$.

Beweis: Sei (x_k) eine Folge in A mit $x_k \to x_0 \in A$. Zu zeigen: $F(x_k) \to F(x_0)$.
Definiere die Funktionen $g, f_1, f_2, \cdots : B \to \mathbb{R}$ durch

$$g(y) := f(x_0,y), \quad f_k(y) := f(x_k,y).$$

Vor. (1) $\Rightarrow g, f_k \in L(B)$; Vor. (2) $\Rightarrow f_k(y) \to g(y)$ $(y \in B)$; Vor. (3) $\Rightarrow |f_k(y)| \le \phi(y)$ $(y \in B)$.

Nach Satz 88:

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_B f_k(y)dy}_{=F(x_k)} = \underbrace{\int_B g(y)dy}_{=F(x_0)}.$$

■

Satz 95 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ und $f : A \times B \to \mathbb{R}$ mit:*
(1) Für jedes $x \in A$ ist $y \mapsto f(x, y)$ in $L(B)$.
(2) Für jedes $y \in B$ ist $x \mapsto f(x, y)$ in $C^1(A, \mathbb{R})$.
(3) $\exists \phi \in L(B) : |f_{x_j}(x, y)| \leq \phi(y)$ $((x, y) \in A \times B,\ j \in \{1, \ldots, n\})$.
Ist F definiert wie in Satz 94, so ist $F \in C^1(A, \mathbb{R})$, und für jedes feste $x \in A$ ist $y \mapsto f_{x_j}(x, y)$ Lebesgueintegrierbar über B $(j = 1, \ldots, n)$ und

$$F_{x_j}(x) = \int_A f_{x_j}(x, y)dy \quad (x \in A,\ j = 1, \ldots, n).$$

Beweis: Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ fest. Sei $x_0 \in A$. A offen $\Rightarrow \exists \rho > 0 :$ $x_0 + te_j \in A$ für $|t| < \rho$. Sei (t_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $t_k \to 0$ und $|t_k| < \rho,\ t_k \neq 0$.

$$g(y) := f_{x_j}(x_0, y) \quad (y \in B),$$

$$f_k(y) := \frac{f(x_0 + t_k e_j, y) - f(x_0, y)}{t_k} \quad (y \in B).$$

Vor. (1) $\Rightarrow f_k \in L(B)$ $(k \in \mathbb{N})$;
Vor. (2) $\Rightarrow f_k(y) \to g(y)$ $(y \in B)$.
Nach dem MWS gilt $f_k(y) = f_{x_j}(x_0 + \xi_k e_j, y)$ mit ξ_k zwischen 0 und t_k.
Vor. (3) $\Rightarrow |f_k(y)| \leq \phi(y)$ $(y \in B)$.
Nach Satz 88 gilt $g \in L(B)$ und

$$\lim_{k\to\infty} \int_B f_k(y)dy = \int_B g(y)dy = \int_B f_{x_j}(x_0, y)dy.$$

Bea. dabei:

$$\int_B f_k(y)dy = \frac{F(x_0 + t_k e_j) - F(x_0)}{t_k}.$$

Also gilt

$$F_{x_j}(x_0) = \int_B f_{x_j}(x_0, y)dy.$$

Nach Satz 94 ist F_{x_j} stetig auf A. Somit folgt die Behauptung ■

Satz 96 *$D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei offen, es sei $[a,b] \times [c,d] \subseteq D$, $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ sei stetig differenzierbar und es sei $f \in C^1(D,\mathbb{R})$.*
Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\alpha(x) := \int_c^{\varphi(x)} f(x,y)dy.$$

Dann ist α differenzierbar auf $[a,b]$ und

$$\alpha'(x) = \int_c^{\varphi(x)} f_x(x,y)dy + f(x,\varphi(x))\varphi'(x) \quad (x \in [a,b]).$$

Beweis:

$$\beta(x,z) := \int_c^z f(x,y)dy \quad (x \in [a,b], z \in [c,d])$$

Dann gilt: β ist partiell differenzierbar nach z und $\beta_z(x,z) = f(x,z)$. Somit ist β_z stetig.

Nach Satz 95 gilt: β ist partiell differenzierbar nach x, $\beta_x(x,z) = \int_c^z f_x(x,y)dy$ und β_x ist stetig.

Somit ist β differenzierbar.

Es ist $\alpha(x) = \beta(x,\varphi(x))$. Also ist α differenzierbar und

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= \beta_x(x,\varphi(x)) \cdot 1 + \beta_z(x,\varphi(x))\varphi'(x) \\ &= \int_c^{\varphi(x)} f_x(x,y)dy + f(x,\varphi(x))\varphi'(x).\end{aligned}$$

■