

Computerunterstützte analytische Methoden
für Rand- und Eigenwertprobleme
Sommersemester 2017

25.04.2017

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und für $v < w$ gelte $F(v)F(w) < 0$.

Zeigen Sie: Es gibt ein $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, sodass der Operator T definiert durch

$$Tu = u - AF(u) \quad (u \in \mathbb{R})$$

die Bedingung $T([v, w]) \subset [v, w]$ erfüllt.

Folgern Sie daraus den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

Aufgabe 2:

(i) Sei $\Omega := (-1, 1)^2$. Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)) \quad (*)$$

mit einem von u unabhängigen $C > 0$. Geben Sie einen geeigneten Wert für C an.

(ii) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige beschränkte offene Menge in \mathbb{R}^2 . Bestimmen Sie eine Konstante C mit der Eigenschaft (*).

(iii) Diskutieren Sie (*) falls Ω unbeschränkt ist.

Die Aufgaben werden in der Übung am 03.05.2017 besprochen.