**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

# Computerunterstützte analytische Methoden für Rand- und Eigenwertprobleme Sommersemester 2017

03.05.2017

## Übungsblatt 2

**Bitte beachten Sie:**
Die Vorlesungen vom 09./11.05.2017 werden auf **Dienstag, den 16.05.2017**, sowie **Dienstag, den 30.05.2017** verlegt. Die Übung vom 10.05.2017 wird auf **Dienstag, den 23.05.2017** verschoben. Alle verlegten Veranstaltungen finden in der Zeit von 15:45-17:15 Uhr im Seminarraum 3.069 statt.

**Aufgabe 3:**
Sei $\Omega$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Für $u \in \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ gelte $-\Delta u \geq 0$ fast überall in $\Omega$. Folgern Sie, dass $u \geq 0$ fast überall in $\Omega$ gilt.

*Hinweis:* Betrachten Sie $v^- = -\min\{v, 0\} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ für $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, sowie

$$\nabla v^- = \begin{cases} 0 & \text{in } \{x\colon v(x) \geq 0\} \\ -\nabla v & \text{in } \{x\colon v(x) < 0\} \end{cases}.$$

**Aufgabe 4:**
Seien $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2\colon\ |x| < 1\}$, $\mathcal{H} := \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ und $\mathcal{L} := \mathrm{L}^2(\Omega)$. Betrachten Sie die Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u + 4\left(1 + |x|^2\right)u + \log\left(u^2 + \frac{1}{2}\right) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}.$$

Zeigen Sie die Existenz einer Lösung in $\mathcal{H}$ indem Sie geeignete Ober- und Unterlösungen wählen.

**Aufgabe 5:**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, $\mathcal{H} := \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ und $\mathcal{L} := \mathrm{L}^2(\Omega)$. Weiter sei der Operator $F\colon \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ gegeben durch

$$F(u) := -\Delta u + f(\cdot, u) \qquad (u \in \mathcal{H}),$$

wobei $f\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ auf $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ stetig seien. Des Weiteren sei $\tilde{u} \in \mathcal{H}$ und $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ definiert durch

$$L(u) := -\Delta u + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \tilde{u})u \qquad (u \in \mathcal{H}).$$

Beweisen Sie, dass $F$ an der Stelle $\tilde{u}$ Fréchet-differenzierbar ist und $F'(\tilde{u}) = L$ gilt.

Die Aufgaben werden in der Übung am 17.05.2017 besprochen.