Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Computerunterstützte analytische Methoden für Rand- und Eigenwertprobleme Sommersemester 2017

17.05.2017

Übungsblatt 3

Aufgabe 6:
Sei Ω die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ und $\eta > 0$. Betrachten Sie das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + f(\cdot, u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}.$$

im Fall $f(x,y) := -1 - \eta y^2$.

(i) Berechnen Sie eine Näherungslösung $\tilde{u}$, indem Sie die DGL für $\eta = 0$ lösen.

(ii) Weiter seien $\hat{c}(x) := \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{u}(x))$ und $\operatorname{Res}(\tilde{u}) := -\Delta\tilde{u} + f(\cdot, \tilde{u})$. Bestimmen Sie ein $z_0 \in C(\overline{\Omega})$, $z_0 > 0$ in $\overline{\Omega}$, sodass

$$-\Delta z_0 + \hat{c} z_0 \geq |\operatorname{Res}(\tilde{u})| \quad \text{fast überall in } \Omega$$

gilt (und $\|z_0\|_\infty$ möglichst klein ist).

(iii) Geben Sie eine geeignete Bedingung an η an, unter denen ein (möglichst kleines) $\varepsilon > 0$ gefunden werden kann, sodass $z := (1+\varepsilon) z_0$ die folgende Bedingung (siehe Vorlesung) erfüllt:

$$\begin{aligned} &-\Delta z + \hat{c} z \\ &\quad \geq |\operatorname{Res}(\tilde{u})| + \max\left\{ f(\cdot, \tilde{u} - z) - f(\cdot, \tilde{u}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \tilde{u}) z,\ -f(\cdot, \tilde{u} + z) + f(\cdot, \tilde{u}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \tilde{u}) z \right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes polygonales Gebiet und $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ offene Dreiecke in $\mathbb{R}^2$ mit $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \overline{\Omega_i}$, sowie $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Weiter sei $u \in C(\overline{\Omega})$ und $u|_{\overline{\Omega_i}} \in C^2(\overline{\Omega_i})$ $(1 \leq i \leq N)$.

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$u \in H^2(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad u \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 8:
Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit $n \leq 3$. Weiter sei $\tilde{u} \in \mathcal{H} := \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ eine Näherungslösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u + f(\cdot, u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}.$$

Bestimmen Sie eine nicht-fallende Funktion $G\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit

$$\sqrt{\mathrm{meas}(\Omega)} \cdot |g(x, \tilde{u}(x) + t)| \leq G(|t|) \quad (x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad G(t) = \mathrm{o}(t) \quad (t \to 0^+)$$

für die folgenden Nichtlinearitäten:

(i) $f(x,y) := \sin(|x|)y + y^2$,

(ii) $f(x,y) := \log(1 + |x|^2) + ay^3$ mit $a \in \mathbb{R}$,

(iii) $f(x,y) := y^d$ mit $d \in \mathbb{N}$,

(iv) $f(x,y) := \sin(y)$,

(v) $f(x,y) := \cos(|x|)y + ae^y$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Die Aufgaben werden in der Übung am 23.05.2017 besprochen.