

Computerunterstützte analytische Methoden
für Rand- und Eigenwertprobleme
Sommersemester 2017

24.05.2017

Übungsblatt 4

Aufgabe 9:

Berechnen Sie für die Einbettung $H^1((0, 1)) \hookrightarrow C([0, 1])$ Einbettungskonstanten C_0, C_1 mit

$$\|u\|_\infty \leq C_0 \|u\|_{L^2((0,1))} + C_1 \|u'\|_{L^2((0,1))} \quad (u \in H^1((0, 1))).$$

Können Sie diese Einbettungskonstanten verbessern, wenn u eine der folgenden Zusatzeigenschaften hat?

- (i) $u(0) = u(1)$.
- (ii) $u(0) = 0$ oder $u(1) = 0$,
- (iii) $u(0) = u(1) = 0$,

Hinweise: Verwenden Sie die folgenden Identitäten:

- $u(x) = \int_0^x u' dt$, falls $u(0) = 0$,
- $u(x) = -\int_x^1 u' dt$, falls $u(1) = 0$,
- $(x - \alpha)u(x) = \int_\alpha^x [(t - \alpha)u]' dt$,
- $(\beta - x)u(x) = -\int_x^\beta [(\beta - t)u]' dt$.

Aufgabe 10:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (für $n \in \{2, 3\}$)

- (i) eine offene Kugel mit Radius R ,
- (ii) ein offener Quader mit Kantenlängen L_1, L_2, L_3 .

Berechnen Sie für die Einbettung $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ Einbettungskonstanten C_0, C_1, C_2 mit

$$\|u\|_\infty \leq C_0 \|u\|_{L^2(\Omega)} + C_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)} \quad (u \in H^2(\Omega)).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 11:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet. Weiter seien $\mathcal{H} := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $L[u] = -\Delta u + cu$, sowie $\bar{c}, \underline{c} \in \mathbb{R}$ mit $\underline{c} \leq c \leq \bar{c}$ in Ω . Außerdem sei K_0 eine Konstante mit der Eigenschaft

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq K_0 \|L[u]\|_{L^2(\Omega)} \quad (u \in \mathcal{H}).$$

Zeigen Sie, dass für $u \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq K_3 \|L[u]\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei

$$K_3 = 1 + K_0 \max \left\{ \frac{1}{2}(\bar{c} - \underline{c}), -\underline{c} \right\}.$$

Die Aufgaben werden in der Übung am 31.05.2017 besprochen.