Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Computerunterstützte analytische Methoden für Rand- und Eigenwertprobleme Sommersemester 2017

31.05.2017

Übungsblatt 5

Aufgabe 12:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt (nicht notwendigerweise konvex!) und $\partial\Omega$ stückweise zweimal stetig differenzierbar. Weiterhin seien $F_0, F_1 > 0$ und ein stetig differenzierbares $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ bekannt mit

$$\begin{aligned} (n-1)H(x) &\leq f^T(x)\cdot\nu(x) && (x \in \partial\Omega),\\ |f(x)| &\leq F_0 && (x \in \overline{\Omega}),\\ \lambda_{max}[-\operatorname{div} f(x)I + Df(x) + Df(x)^T] &\leq F_1 && (x \in \Omega), \end{aligned}$$

wobei $\lambda_{max}[M]$ den größten Eigenwert einer symmetrischen Matrix M bezeichnet.

Beweisen Sie für $u \in \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u_{xx}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|\Delta u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + 2F_0\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\Delta u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + F_1\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Folgern Sie daraus, dass

$$\|u_{xx}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq K_2\|L[u]\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \quad (u \in \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega))$$

gilt, wobei

$$K_2 = \sqrt{\kappa^2 + 2F_0K_1\kappa + F_1K_1^2}.$$

Hierbei sind K_0, K_1 wie in der Vorlesung definiert und $\kappa = 1 + K_0\|c\|_\infty$ die bereits bekannte Konstante aus der Abschätzung $\|\Delta u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \kappa\|L[u]\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ $(u \in \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega))$.

Hinweis: Berechnen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \left(2(f\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial\nu} - |\nabla u|^2(f\cdot\nu)\right)\,d\sigma$$

einerseits mit dem Gauß'schen Satz und andererseits unter Verwendung von $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial\nu}\nu$ fast überall auf $\partial\Omega$.

Aufgabe 13:
Sei $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\; x_1, x_2 \in (0,1) \text{ und } (x_1-4)^2 + (x_2-4)^2 > 25\}$. Geben Sie f, F_0, F_1 mit den Eigenschaften aus Aufgabe 12 explizit an.

Hinweis: Wählen Sie zum Beispiel einen Punkt $x_0 \in \overline{\Omega}$, bzgl. dessen Ω sternförmig ist. Ein Vektorfeld $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) := \lambda(x)(x - x_0)$ mit passend gewähltem λ genügt dann der ersten Bedingung aus Aufgabe 12.

Die Aufgaben werden in der Übung am 07.06.2017 besprochen.