Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Computerunterstützte analytische Methoden für Rand- und Eigenwertprobleme Sommersemester 2017

07.06.2017

Übungsblatt 6

Aufgabe 14:
Sei H ein Hilbertraum, $D(A) \subset H$ ein Unterraum und $A\colon D(A) \to H$ ein symmetrischer linearer Operator, welcher eine Orthonormalbasis aus Eigenelementen von H besitzt. Die dazugehörigen Eigenwerte seien mit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet und es gelte $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Weiter seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $u \in D(A)$ mit $\|u\| = 1$ gegeben. Ferner seien $\delta := \|Au - \gamma u\|$ und $\gamma := \langle Au, u\rangle$. Zeigen Sie, dass aus

$$\delta^2 < (\gamma - a)(b - \gamma)$$

folgt, dass das Intervall (a, b) mindestens einen Eigenwert von A enthält.

Hinweis: Aus der Annahme $\lambda_n \notin (a, b)$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt:

$$\left\|\left(A - \frac{a+b}{2}\right)u\right\|^2 \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 15:
Seien H und A wie in Aufgabe 14 definiert. Für $n, l \in \mathbb{N}$ seien $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ bekannt mit

$$\lambda_n \leq \mu < \lambda_{n+1} \leq \cdots \leq \lambda_{n+l} < \nu \leq \lambda_{n+l+1}.$$

Ferner seien $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_l \in D(A)$ und $\mu < \tilde{\lambda}_1 \leq \cdots \leq \tilde{\lambda}_l < \nu$ gegeben mit

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_j\rangle &= \delta_{ij} && (i, j = 1, \ldots, l), \\ \langle A\tilde{u}_i, \tilde{u}_j\rangle &= \delta_{ij}\tilde{\lambda}_i && (i, j = 1, \ldots, l), \end{aligned}$$

sowie die Defekte $\|A\tilde{u}_i - \tilde{\lambda}_i\tilde{u}_i\|$ mit δ_i bezeichnet.

Beweisen Sie die folgende Clusterversion des Einschließungssatzes von Kato:

$$\tilde{\lambda}_k - \sum_{i=k}^{l} \frac{\delta_i^2}{\nu - \tilde{\lambda}_i} \leq \lambda_{n+k} \leq \tilde{\lambda}_k + \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta_i^2}{\tilde{\lambda}_i - \mu} \qquad (k = 1, \ldots, l).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 16:
Seien H und A wie in Aufgabe 14 definiert. Beweisen Sie das Max-Min-Prinzip:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in D(A),\, u \neq 0} \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle},$$

$$\lambda_{n+1} = \max_{v_1, \ldots, v_n \in H} \quad \inf_{\substack{u \in [v_1, \ldots, v_n]^\perp \\ u \in D(A),\, u \neq 0}} \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Aufgaben werden in der Übung am 14.06.2017 besprochen.