

**Computerunterstützte analytische Methoden
 für Rand- und Eigenwertprobleme
 Sommersemester 2017**

14.06.2017

Übungsblatt 7

Aufgabe 17:

Sei H ein Hilbertraum, $D(A) \subset H$ ein Unterraum und $A: D(A) \rightarrow H$ ein symmetrischer linearer Operator, welcher eine Orthonormalbasis $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von H aus Eigenelementen besitzt. Die dazugehörigen Eigenwerte seien mit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet und es gelte $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).

Weiter seien $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H mit $\psi_n \in D(A)$ ($n \in \mathbb{N}$) und es gelte

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle A \sum_{i=1}^N \langle \psi_i, \varphi_1 \rangle \psi_i, \sum_{j=1}^N \langle \psi_j, \varphi_1 \rangle \psi_j \right\rangle = \lambda_1.$$

Ferner seien $A^{(N)} = (\langle A\psi_i, \psi_j \rangle)_{i,j=1,\dots,N}$ und $\lambda_1^{(N)}$ der kleinste Eigenwert des Problems

$$A^{(N)}x = \lambda x \quad (x \in \mathbb{C}^N).$$

Zeigen Sie:

$$\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_1^{(N)}.$$

Aufgabe 18:

Seien A wie in Aufgabe 17 und $u_0 \in D(A)$, sowie $\tilde{H} := [u_0]^\perp$.

- (i) Zeigen Sie, dass $D(A) \cap \tilde{H}$ dicht in \tilde{H} liegt.
- (ii) $P_{\tilde{H}}$ bezeichne die orthogonale Projektion auf \tilde{H} und der Operator \tilde{A} sei gegeben durch

$$\tilde{A}: D(A) \cap \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}, \quad \tilde{A}u = P_{\tilde{H}}Au.$$

Zeigen Sie, dass \tilde{A} symmetrisch ist.

- (iii) Im Folgenden besitze \tilde{A} ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenelementen zu den Eigenwerten $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

Bitte wenden!

Aufgabe 19:

Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u \quad (u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Berechnen Sie mit dem Rayleigh-Ritz-Verfahren eine obere Schranke für den ersten Eigenwert. Verwenden Sie dabei die numerischen Basiselemente

(i) $\tilde{u}_1(x) = 1 - |x|^2$.

(ii) $\tilde{u}_1(x) = 1 - |x|^2$, $\tilde{u}_2(x) = 1 - |x|^4$.

(iii) $\tilde{u}_1(x) = 1 - |x|^2$, $\tilde{u}_2(x) = (1 - |x|^2)x_1$.

(iv) $\tilde{u}_1(x) = 1 - |x|^2$, $\tilde{u}_2(x) = (1 - |x|^2)x_1$, $\tilde{u}_3(x) = (1 - |x|^2)x_2$.

Die Aufgaben werden in der Übung am 21.06.2017 besprochen.