Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Computerunterstützte analytische Methoden für Rand- und Eigenwertprobleme
Sommersemester 2017

21.06.2017

Übungsblatt 8

Aufgabe 20:
Sei H ein Hilbertraum, $D(A) \subset H$ ein Unterraum und $A\colon D(A) \to H$ ein symmetrischer linearer Operator, welcher eine Orthonormalbasis von H aus Eigenelementen besitzt. Die dazugehörigen Eigenwerte seien mit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet und es gelte $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Des Weiteren seien $\tilde{u} \in D(A)$, $\|\tilde{u}\| = 1$, $\tilde{\lambda} = \langle A\tilde{u}, \tilde{u}\rangle$ und $\delta := \|A\tilde{u} - \tilde{\lambda}\tilde{u}\| \neq 0$. Ferner seien $d := \delta^{-1}(A\tilde{u} - \tilde{\lambda}\tilde{u})$, sowie E der von $\tilde{u}$ und d aufgespannte Unterraum.

(i) Beweisen Sie für jedes $t < \tilde{\lambda}$ die Existenz eines linearen Operators $B_t\colon E \to E$, für den $B_t\tilde{u} = A\tilde{u}$ gilt und $B_t - t\,\mathrm{id}$ positiv semidefinit ist.

(ii) Für einen Unterraum $U \subset H$ sei P_U die Orthogonalprojektion auf U und für $t < \tilde{\lambda}$ bezeichne μ_t den kleinsten Eigenwert des Operators
$$A_t = B_t P_E + t P_{E^\perp}.$$
Zeigen Sie, dass $\mu_t = t$ gilt.

(iii) Beweisen Sie: Ein Verfahren, welches für jeden symmetrischen Operator A allein aus $\tilde{u} \in D(A) \setminus \{0\}$ und $A\tilde{u}$ eine obere Schranke $S(\tilde{u}, A\tilde{u})$ für den kleinsten Eigenwert $\lambda_1[A]$ liefert, erfüllt notwendigerweise
$$\frac{\langle A\tilde{u}, \tilde{u}\rangle}{\langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle} \leq S(\tilde{u}, A\tilde{u}),$$
d.h. der Rayleigh-Quotient liefert die *optimale* obere Schranke für $\lambda_1[A]$, sofern nur $\tilde{u} \in D(A) \setminus \{0\}$ und $A\tilde{u}$ benutzt werden.

Aufgabe 21:
Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < 1\}$. Betrachten Sie das Eigenwertproblem
$$-\Delta u = \lambda u \qquad (u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega))$$
(vgl. Aufgabe 19). Berechnen Sie mit dem Temple-Lehmann-Verfahren eine untere Schranke für den ersten Eigenwert. Verwenden Sie dabei die grobe untere Schranke $\nu = \frac{5}{4}\pi^2$ für den zweiten Eigenwert (Beweis folgt später), sowie die numerischen Basiselemente

(i) $\tilde{u}_1(x) = 1 - |x|^2$.

(ii) $\tilde{u}_1(x) = 1 - |x|^2, \qquad \tilde{u}_2(x) = 1 - |x|^4$.

(iii) $\tilde{u}_1(x) = 1 - |x|^2, \qquad \tilde{u}_2(x) = (1 - |x|^2)x_1$.

Bitte wenden!

Aufgabe 22:
Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -u'' + \sin(x)u - \lambda u = 0 & \text{in } (0, \pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Verfahren von Rayleigh-Ritz und Temple-Lehmann eine Einschließung für den ersten Eigenwert von (1). Bestimmen Sie dafür zunächst eine zulässige grobe untere Schranke ν für den zweiten Eigenwert, indem Sie ein geeignetes Vergleichsproblem heranziehen.

Hinweis: Verwenden Sie $\tilde{u}(x) = \sin(x)$ als numerische Basisfunktion.

Die Aufgaben werden in der Übung am 28.06.2017 besprochen.