Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Computerunterstützte analytische Methoden für Rand- und Eigenwertprobleme
Sommersemester 2017

05.07.2017

Übungsblatt 10

Aufgabe 26:
Sei H ein Hilbertraum, $D(M) \subset H$ ein Unterraum und $M\colon D(M) \times D(M) \to \mathbb{R}$ eine symmetrische positiv definite Bilinearform. Weiter besitze das Eigenwertproblem

$$u \in D(M), \qquad M(u,v) = \lambda \langle u,v \rangle \quad (v \in D(M))$$

eine Orthonormalbasis aus Eigenelementen von H. Die zugehörigen Eigenwerte seien mit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet und es gelte $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Betrachten Sie für gegebenes $\tilde{u} \in H$ das Problem:

$$\text{Finde } w \in D(M) \text{ mit} \qquad M(w,v) = \langle \tilde{u}, v \rangle \quad (v \in D(M)). \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass $w \in D(M)$ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn

$$-M(w,w) = \min_{v\in D(M)} \{M(v,v) - 2\langle \tilde{u}, v\rangle\}$$

gilt und das Minimum für $v = w$ angenommen wird.

(ii) Sei nun X ein reeller Vektorraum, $T\colon D(M) \to X$ ein linearer Operator und $b\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine symmetrische positiv definite Bilinearform mit

$$M(u,v) = b(Tu, Tv) \quad (u, v \in D(M)).$$

Zeigen Sie, dass für eine Lösung $w \in D(M)$ von (1) gilt:

$$-M(w,w) = \max_{x\in V_{\tilde{u}}} \{-b(x,x)\},$$

wobei $V_{\tilde{u}} := \{x \in X\colon b(x, Tv) = \langle \tilde{u}, v\rangle \ (v \in D(M))\}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 27:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und $D(M) := \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega) : \int_\Omega u \, dx = 0\}$, sowie

$$M(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$u \in D(M), \qquad M(u,v) = \lambda \langle u, v\rangle_{\mathrm{L}^2} \quad (v \in D(M)). \tag{2}$$

Ferner seien $X := D(M) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ und $T\colon D(M) \to X,\ Tu := (u,u)$, sowie für ein $\gamma \in \mathbb{R}$

$$b((\hat{u}_1, \hat{u}_2), (\hat{v}_1, \hat{v}_2)) := \int_\Omega \nabla \hat{u}_1 \cdot \nabla \hat{v}_1 \, dx + \gamma \int_\Omega (\hat{u}_2 \hat{v}_2 - \hat{u}_1 \hat{v}_1) \, dx.$$

(i) Wie lautet die starke Formulierung von Problem (2)?

(ii) Zeigen Sie, dass b mit einer geeigneten Wahl von $\gamma > 0$ positiv semidefinit ist und

$$M(u,v) = b(Tu, Tv) \qquad (u, v \in D(M))$$

gilt.

(iii) Konstruieren Sie zu vorgegebenem $\tilde{u} \in D(M)$ ein Element $\hat{w} \in X$ mit

$$b(\hat{w}, Tv) = \langle \tilde{u}, v\rangle_{\mathrm{L}^2} \qquad (v \in D(M)).$$

Aufgabe 28:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und gleichmäßig positiv definit mit $a_{ij} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = \lambda u & \text{in } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

(i) Geben Sie die schwache Formulierung dieses Eigenwertproblems mit Hilfe einer Bilinearform M an.

(ii) Wählen Sie geeignete X, b, T für das Verfahren von Lehmann-Goerisch.

(iii) Bestimmen Sie zu gegebenem $\tilde{u} \in D(M)$ ein $\hat{w} \in X$ mit

$$b(\hat{w}, Tv) = \langle \tilde{u}, v\rangle \quad (v \in D(M)).$$

Wie sollten Sie $\hat{w}$ wählen, damit „gute“ Schranken berechnet werden?

(iv) Konstruieren Sie eine Homotopie zur Berechnung grober unterer Eigenwertschranken.

Die Aufgaben werden in der Übung am 12.07.2017 besprochen.