Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Computerunterstützte analytische Methoden für Rand- und Eigenwertprobleme Sommersemester 2017

19.07.2017

Übungsblatt 11

Aufgabe 29:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Ferner sei auf $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ das innere Produkt definiert durch

$$\langle u, v \rangle_{\mathrm{H}_0^1} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (u, v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)).$$

(i) Sei $u \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Beweisen Sie die Existenz von $u_1, ..., u_n \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ mit

$$u[\phi] = \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx \qquad (\phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)). \tag{1}$$

(ii) Zeigen Sie, dass umgekehrt für $u_1, ..., u_n \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ durch (1) ein Element in $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ definiert wird.

(iii) Zeigen Sie: Ist das Funktional $u \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ sowohl durch $u_1, ..., u_n \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ als auch durch $v_1, ..., v_n \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ in der Form (1) darstellbar, so existiert ein $w \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega)$, $w = (w_1, ..., w_n)$ mit $u_i = v_i + w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\mathrm{div}\, w = 0$.

(iv) Beweisen Sie:

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |u_i|^2 \, dx \right)^{1/2} : \; u_1, ..., u_n \in \mathrm{L}^2(\Omega), (1) \text{ gilt} \right\}.$$

Aufgabe 30:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $n \geq 3$, sowie $f \colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Ferner existiere $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ und es gelte

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right| \leq C \left(1 + |y|^{r-2} \right) \text{ für ein } r > 2.$$

Des Weiteren erfülle p die Ungleichungen

$$\frac{n-2}{2n} < \frac{1}{p} < \frac{n+2}{2nr}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $F \colon \mathrm{L}^p(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, $u \mapsto f(\cdot, u(\cdot))$ an jeder Stelle $u_0 \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ Fréchet-differenzierbar ist, und

$$F'(u_0) \colon \mathrm{L}^p(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega), \; u \mapsto cu$$

mit $c(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, u_0(x))$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 31:
Finden Sie ein $u \in \mathrm{H}^{-1}((0,1))$, welches sich nicht in der Form

$$u[\phi] = \int_0^1 v\phi \, dx \qquad (\phi \in \mathrm{H}_0^1((0,1)))$$

mit einem $v \in \mathrm{L}^2((0,1))$ darstellen lässt.

Aufgabe 32:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und

$$\begin{cases} 1 < p < \infty & \text{falls } n = 2, \\ 1 < p < \frac{2n}{n-2} & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p} \leq C_p \cdot \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2} \qquad (u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega))$$

gilt, wobei

$$C_p := \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{meas}(\Omega)^{1/p} \cdot \left[\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{p}{2}-\nu+1\right)\right]^{1/\nu} & \text{falls } n = 2, \\ \frac{n-1}{\sqrt{n}(n-2)} \operatorname{meas}(\Omega)^{1/p-1/2+1/n} & \text{falls } n \geq 3 \end{cases}$$

und $\nu = \lfloor p/2 \rfloor$ (im Fall $n = 2$ wird für $\nu = 0$ der Klammer-Ausdruck als 1 gesetzt).

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Beweisen Sie zunächst für $v \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Ungleichung

$$\|v\|_{\mathrm{L}^{n/(n-1)}} \leq \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{\mathrm{L}^1} \right)^{1/n}. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $v \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die folgende Ungleichung

$$|v(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, .., x_{i-1}, t, x_{i+1}, .., x_n) \right| \, dt.$$

(ii) Zeigen Sie mithilfe eines Dichtheitsargumentes und geschickter Wahl von v in (2), dass für alle $1 \leq s < n$ und $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{ns/(n-s)}} \leq \frac{s}{2} \cdot \frac{n-1}{n-s} \left(\prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\mathrm{L}^s} \right)^{1/n} \tag{3}$$

(iii) Verwenden Sie im Fall $n \geq 3$ die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel und die Ungleichung (3) mit $s = 2$ um die Behauptung zu zeigen.

(iv) Beweisen Sie im Fall $n = 2$ zunächst für alle $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p}^p \leq \frac{1}{8} \left(\frac{p}{2}\right)^2 \|u\|_{\mathrm{L}^{p-2}}^{p-2} \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2}^2 . \tag{4}$$

Hinweise: Verwenden Sie hierfür die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel, sowie Ungleichung (3) mit $s = 1$ und ersetzen sie außerdem u durch $|u|^{p/2}$.

(v) Zeigen Sie nun durch ν-fache Anwendung von (4) die Behauptung im Fall $n = 2$.

Die Aufgaben werden in der Übung am 26.07.2017 besprochen.