Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und für $v < w$ gelte $F(v)F(w) < 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $A \in \mathbb{R},\ A \neq 0$ mit $\overline{T}([v,w]) \subseteq [v,w]$, wobei der Operator T durch

$$Tu = u - AF(u) \qquad (u \in \mathbb{R})$$

definiert wird. Folgern Sie daraus den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

Aufgabe 2

Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$.

a) Die Ungleichung

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt für jedes $u \in H_0^1(\Omega)$ mit einem von u unabhängigen $C > 0$. Geben Sie einen geeigneten Wert für C an.

b) Beweisen Sie die Existenz einer Konstanten C mit obiger Eigenschaft, nur dass Ω nun eine beliebige beschränkte offene Menge in $\mathbb{R}^2$ sei.

Aufgabe 3

Es sei Ω ein beschränktes Gebie in $\mathbb{R}^n$ und für $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gelte $-\Delta u \geq 0$ fast überall auf Ω. Folgern Sie daraus, dass $u \geq 0$ fast überall auf Ω gilt.

Hinweis: Beachten Sie $v^- = -\min v, 0 \in H_0^1(\Omega)$ für $v \in H_0^1(\Omega)$ sowie

$$\nabla v^- = \begin{cases} 0 & \text{auf } \{x :\ v(x) \geq 0\} \\ -\nabla v & \text{auf } \{x :\ v(x) < 0\} \end{cases}$$