Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 10

Aufgabe 28

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

a) Beweisen Sie für $u \in H^{-1}(\Omega)$ die Existenz von $u_1, ..., u_n \in L^2(\Omega)$, sodass gilt:

$$u[\phi] = \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx \qquad (\phi \in H_0^1(\Omega)). \tag{1}$$

Umgekehrt definieren beliebige $u_1, ..., u_n \in L^2(\Omega)$ ein Element in $H^{-1}(\Omega)$, dessen Wirkung auf $H_0^1(\Omega)$ wie in (1) erklärt ist. Was sagt dies über den Divergenz-Operator aus?

b) Zeigen Sie: Wird das Funktional $u \in H^{-1}(\Omega)$ sowohl durch $u_1, ..., u_n \in L^2(\Omega)$ als auch durch $v_1, ..., v_n \in L^2(\Omega)$ in der Form (1) dargestellt, so existiert ein $w \in H(\mathrm{div}, \Omega)$, $w = (w_1, ..., w_n)$ mit

$$u_i = v_i + w_i$$

und $\operatorname{div} w = 0$.

c) Beweisen Sie:

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |u_i|^2 \, dx \right)^{1/2} : \ u_1, ..., u_n \in L^2(\Omega), (1) \text{ gilt} \right\}.$$

Aufgabe 29

Finden Sie ein $u \in H^{-1}((0,1))$, welches sich nicht in der Form

$$u[\phi] = \int_{(0,1)} v\phi \, dx \tag{2}$$

für ein $v \in L^2(\Omega)$ darstellen lässt.

Aufgabe 30

Es sei Ω die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$. Beweisen Sie, dass die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ für $p = \frac{2n}{n-2}$ nicht kompakt ist. Verwenden Sie dazu die Funktionen $\{u^s\}_{0<s<1}$, definiert durch

$$u^s(x) := \begin{cases} s^{-\frac{n-2}{2}} u\left(\frac{x}{s}\right) & |x| \leq s \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist $u \in C_0^\infty(\Omega)$ geeignet zu wählen.