Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 11

Aufgabe 31

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Beweisen Sie für $\sigma \in L^2(\Omega)^n$ die Existenz der sogenannten Helmholtz-Zerlegung

$$\sigma = \nabla u + w$$

mit $u \in H_0^1(\Omega)$ und $w \in L^2(\Omega)^n$, sodass $\operatorname{div} w = 0$ in $H^{-1}(\Omega)$ gilt.

Aufgabe 32

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und einfach zusammenhängend. Dann gibt es für $v \in C^\infty(\Omega)^2$ mit $\operatorname{div} v = 0$ ein $z \in C^\infty(\Omega)$ mit

$$v = \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass eine solche Darstellung auch für $w \in L^2(\Omega)^2$ mit $\operatorname{div} w = 0$ existiert, i.e. dass ein $\psi \in H_0^1(\Omega)$ existiert mit

$$w = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie dazu das Problem

$$\int_\Omega \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \chi \, dx = \int_\Omega w \cdot \chi \, dx \qquad (\chi = (\chi_1, \chi_2) \in C_0^\infty(\Omega)^2)$$

und verwenden Sie die Helmholtz-Zerlegung für Vektorfelder χ.

Aufgabe 33

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $p < \infty$, falls $n = 2$ und $p \leq 1, 2n/(n-2)$, falls $n \geq 3$. Zeigen Sie:

$$\|u\|_{L^p} \leq C(p) \cdot \|u\|_{H_0^1} \qquad (u \in H_0^1(\Omega)),$$

wobei

$$C(p) := \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{meas}(\Omega)^{1/p} \cdot \left[\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}\right) \cdots \left(\frac{p}{2} - \nu + 1\right)\right]^{1/\nu} & n = 2 \\ \frac{n-1}{\sqrt{n}(n-2)} \operatorname{meas}(\Omega)^{1/p - 1/2 + 1/n} & n \geq 3. \end{cases}$$

und $\nu = \lfloor p/2 \rfloor$. Das Produkt wird als 1 definiert, falls $\nu = 0$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, zunächst mithilfe der punktweisen Abschätzung

$$|v(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, .., x_{i-1}, t, x_{i+1}, .., x_n) \right| dt,$$

dass für alle $v \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ die Ungleichung

$$\|v\|_{L^{n/(n-1)}} \leq \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1} \right)^{1/n}$$

gilt.

b) Zeigen Sie mithilfe eines Dichtheitsargumentes und geschickter Wahl von v in a), dass für alle $1 \leq s < n$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^{ns/(n-s)}} \leq \frac{s}{2} \cdot \frac{n-1}{n-s} \left(\prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^s} \right)^{1/n} \tag{1}$$

c) Für $n \geq 3$ benutzen Sie die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel und setzen Sie $s = 2$.

d) Im Fall $n = 2$ benutzen Sie ebenfalls die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel und setzen sie $s = 1$, ersetzen Sie in (1) u durch $u^{p/2}$. Benutzen Sie anschließend die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ν mal.