Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 12

Aufgabe 34

Sei $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ beschränkt, stetig und möge der folgenden Voraussetzung genügen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ existiert, } \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq C\left(1 + |y|^{r-2}\right) \text{ für ein } r > 2.$$

p erfülle ferner die Ungleichungen

$$\frac{n-2}{2n} < \frac{1}{p} < \frac{n+2}{2nr}.$$

Beweisen Sie, dass die Abbildung $\mathcal{F} : L^p(\Omega) \to H^{-1}(\Omega),\ u \mapsto f(\cdot, u(\cdot))$ an jeder Stelle $u_0 \in L^p(\Omega)$ Fréchet-differenzierbar ist, und es gilt:

$$\mathcal{F}'(u_0) : L^p(\Omega) \to H^{-1}(\Omega),\ u \mapsto cu$$

mit $c(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, u_0(x))$.

Aufgabe 35

Sei $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ monoton wachsend und $t \mapsto G(t^{1/r})$ sei für ein $r > 0$ konkav. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$t \mapsto G(t^{1/p})^{p/r}$$

für $p > r$ ebenfalls konkav ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Falls G zweimal differenzierbar ist, zeigen Sie Konkavität, indem Sie die entsprechende zweite Ableitung abschätzen.

b) Sei

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und definieren Sie $\phi_\varepsilon := \varepsilon^{-1}\phi((x+\varepsilon)/\varepsilon)$. Zeigen Sie, dass $H_\varepsilon := H * \phi_\varepsilon$ glatt ist $(H \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \varepsilon > 0)$.

c) Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Zeigen Sie, dass falls H stetig auf U ist, so gilt: H_ε konvergiert lokal gleichmäßig auf U gegen H für $\varepsilon \to 0$. Beachten Sie: $1 = \int \phi_\varepsilon$

d) Zeigen Sie, dass eine Funktion H genau dann konkav ist, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ die Funktion H_ε konkav ist.

e) Folgern Sie, dass $G(t^{1/p})^{p/r}$ konkav ist.