Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 2

Aufgabe 4

Sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Betrachten Sie die Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u & = 1 + u^2 \qquad \text{auf } \Omega \\ u & = 0 \qquad\quad\ \ \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie die Existenz von einer Lösung in $\mathcal{H} := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ mittels einer Wahl von geeigneten Ober- und Unterlösungen und wählen Sie expizit eine passende Konstante c um die Inverspositivität von $L := -\Delta + c : \mathcal{H} \to L^2(\Omega)$, sowie die Monotonie des Fixpunktoperators zu gewährleisten.

Aufgabe 5

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, und der Operator $F : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ sei gegeben durch

$$F[u](x) := -\Delta u(x) + f(x, u(x)) \qquad (u \in \mathcal{H}).$$

Dabei seien $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\partial_y f$ auf $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ stetig. Sei $\tilde{u} \in \mathcal{H}$, und $L : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ definiert durch

$$L[u](x) := -\Delta u(x) + \partial_y f(x, \tilde{u}(x)) u(x) \qquad (u \in \mathcal{H}).$$

Beweisen Sie, dass F an der Stelle $\tilde{u}$ Fréchet-differenzierbar ist und $F'[\tilde{u}] = L$ gilt.

Aufgabe 6

Sei $T : X \to X$ eine stetige und kompakte Abbildung auf einem Banachraum X . Weiter existiere ein $r > 0$, derart, dass für jedes x_0 , welches die Gleichung

$$x_0 = tF(x_0)$$

für ein $0 < t < 1$ löst, bereits $\|x_0\| \leq r$ folgt. Dabei sei nicht vorausgesetzt, dass die Gleichung $x = tF(x)$ überhaupt eine Lösung besitzt. Zeigen Sie, dass dann T einen Fixpunkt hat.
Hinweis: Verwenden Sie die Abbildung:

$$T : X \to X, \ x \mapsto \begin{cases} F(x), & \text{falls } \|F(x)\| \leq 2r \\ 2r \frac{F(x)}{\|F(x)\|}, & \text{sonst.} \end{cases}$$