Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 3

Aufgabe 7

Sei Ω die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ und $\eta \geq 0$. Betrachten Sie das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u &= 1 + \eta u^2 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie eine Näherungslösung $\tilde{u}$, indem Sie die DGL für $\eta = 0$ lösen

b) Es sei $c(x) := \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{u}(x))$ mit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x,y) := -1 - \eta y^2$. Wählen Sie ein $z_0 \in C(\overline{\Omega})$, sodass $-\Delta z_0 + c z_0 \geq |\, Res(\tilde{u})|$ gilt (und $\|z_0\|_\infty$ sollte möglichst klein sein).

c) Wählen Sie ein passendes (und möglichst kleines) $\varepsilon > 0$, sodass $z := (1+\varepsilon) z_0$ die für den Existenzsatz erforderliche Bedingung

$$\begin{aligned} -\Delta z + cz \geq& |\, Res(\tilde{u})| \\ &+ \max\left\{ f(x, \tilde{u} - z) - f(x, \tilde{u}) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{u}) z,\ -f(x, \tilde{u} + z) + f(x, \tilde{u}) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{u}) z \right\} \end{aligned}$$

erfüllt.

Frage: Wie groß kann man η wählen, damit das Verfahren noch funktioniert?

Aufgabe 8

Sei $\Omega := (-1,1) \times (0,1)$, sowie $\Omega^+ := (0,1) \times (0,1)$ und $\Omega^- := (-1,0) \times (0,1)$. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ mit $u^\pm := u|_{\Omega^\pm} \in C^2(\overline{\Omega_\pm})$. Dann gilt

$$u \in H^2(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu^+} \equiv -\frac{\partial u^-}{\partial \nu^-} \qquad \text{auf } \{0\} \times (0,1).$$

Dabei sind $\nu^\pm$ die nach außen gerichteten Normalenvektorfelder von $\Omega_\pm$.

Aufgabe 9

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ offen, beschränkt und nicht leer. Geben Sie explizit ein Element $u \in H^2(\Omega)$ an, welches keinen stetigen Repräsentanten hat.

b) Zeigen Sie, dass jedes $u \in H^1((0,1))$ einen stetigen Repräsentanten u^* hat. Zeigen Sie weiter, dass der Operator

$$T : H^1((0,1)) \to C([0,1]),\ u \mapsto u^*$$

kompakt ist.