**Karlsruher Institut für Technologie**
**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

# Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 4

## Aufgabe 10

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, konvex und $\partial\Omega$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für $u \in \mathcal{H} := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)} \leq K_3 \|L[u]\|_{L^2(\Omega)},$$

mit

$$K_3 = 1 + K_0 \max\left\{\frac{1}{2}(\overline{c} - \underline{c}), -\underline{c}\right\}.$$

Hier bei ist $L[u] = -\Delta u + cu$ und für die Konstanten $\overline{c}, \underline{c}$ gelte $\underline{c} \leq c \leq \overline{c}$ auf $\Omega$. $K_0$ sei eine Konstante mit der Eigenschaft $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq K_0 \|L[u]\|_{L^2(\Omega)}$ $(u \in \mathcal{H})$.

## Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass für die Einbettung von $H^1((0,1))$ in $C([0,1])$ folgende Paare von Konstanten $C_0$, $C_1$ die Ungleichung

$$\|u\|_\infty \leq C_0 \|u\|_{L^2((0,1))} + C_1 \|u'\|_{L^2((0,1))} \qquad (u \in H^1((0,1)) \text{ mit unten stehenden Zusatzeigenschaften})$$

erfüllen:

a) $C_0 = 0$, $C_1 = 1/2$, falls $u(0) = u(1) = 0$.

b) $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, falls $u(0) = 0$ oder $u(1) = 0$.

c) $C_0 \geq 1$ beliebig, $C_1 = 1/(2\sqrt{3}C_0)$, falls $u(0) = u(1)$.

d) $C_0 \geq 1$ beliebig, $C_1 = 1/(\sqrt{3}C_0)$, ohne weitere Voraussetzungen.

Geben Sie außerdem Konstanten $C_0$ und $C_1$ für die Einbettung $H^1(\mathbb{R})$ in $C_b(\mathbb{R})$ an, wobei $C_b(\mathbb{R})$ der Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist, versehen mit der $\|\cdot\|_\infty$.

## Aufgabe 12

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (mit $n \in \{2, 3\}$)

a) eine offene Kugel mit Radius $R$,

b) ein offener Quader mit Kantenlängen $L_1, L_2(, L_3)$.

Berechnen Sie für die Einbettung $H^2(\Omega)$ in $C(\overline{\Omega})$ Einbettungskonstanten $C_0, C_1, C_2$ mit

$$\|u\|_\infty \leq C_0 \|u\|_2 + C_1 \|\nabla u\|_2 + C_1 \|u_{xx}\|_2 \qquad (u \in H^2(\Omega)).$$