**Karlsruher Institut für Technologie**
**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

# Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 5

## Aufgabe 13

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit stückweise $C^2$-Rand, sowie $u \in C^2(\Omega)$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie

$$-\Delta u \frac{\partial u}{\partial \nu} + \nu^T u_{xx} \nabla u = (n-1) H \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2$$

fast überall auf $\partial\Omega$. Hierbei sei $\nu$ das Einheitsnormalenvektorfeld, das nach außen zeigt und $H$ die mittlere Krümmung.
Hinweis: Für fast alle $x_0 \in \partial\Omega$ können Sie ein Koordinatensystem wählen, sodass die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n : \ x_n = 0\}$ der Tangentialraum an $\partial\Omega$ im Punkt $x_0$ ist. Wird $\partial\Omega$ nun lokal als Graph einer Funktion $f : U \to \partial\Omega$ dargestellt, wobei $U$ eine kleine Umgebung von $x_0$ ist, so ist die mittlere Krümmung gegeben durch

$$H(x_0) = \frac{1}{n-1} spur(f_{xx})(x_0)$$

.

## Aufgabe 14

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen (nicht notwendigerweise konvex!) und $\partial\Omega$ stückweise zweimal stetig differenzierbar. Weiterhin seien $F_0, F_1 > 0$ und ein stetig differenzierbares $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ bekannt mit

$$\begin{aligned} f^T(x)\nu(x) &\geq (n-1)H(x) \qquad (x \in \partial\Omega) \\ |f(x)| &\leq F_0 \qquad (x \in \overline{\Omega}) \\ \lambda_{max}[-\,div\, f(x) I + Df(x) + Df(x)^T] &\leq F_1 \qquad (x \in \Omega), \end{aligned}$$

wobei $\lambda_{max}[M]$ den größten Eigenwert einer symmetrischen Matrix M bezeichnet. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2F_0 \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + F_1 \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

für $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.
Folgern Sie daraus, dass $\|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)} \leq K_3 \|L[u]\|_{L^2(\Omega)}$ gilt, mit $K_3 = \sqrt{\kappa^2 + 2F_0 K_1 \kappa + F_1 K_1^2}$. Hierbei sind $K_0, K_1, K_2$ wie in der Vorlesung definiert und

$$\kappa = 1 + K_0 \|c\|_\infty$$

die bereits bekannte Konstante aus der Abschätzung $\|\Delta u\|_{L^2} \leq \kappa \|L[u]\| \quad (u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$
Hinweis: Berechnen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \left( 2(f \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} - |\nabla u|^2 (f \cdot \nu) \right) d\sigma$$

nach dem Gauß'schen Satz, und benutzen Sie andererseits $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \nu$ fast überall auf $\partial\Omega$).

Bitte wenden!

**Aufgabe 15**

Sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0, y > 0 \text{ und } (x-4)^2 + (y-4)^2 > 25\} \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. Geben Sie explizit ein $f, F_0, F_1$ mit den Eigenschaften aus Aufgabe 14 an.
Hinweis: Wählen Sie zum Beispiel einen Punkt $x_0 \in \overline{\Omega}$, bzgl. dessen $\Omega$ sternförmig ist. Ein Vektorfeld $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) := \lambda(x)(x - x_0)$ mit passendem $\lambda$ genügt dann der ersten Bedingung aus Aufgabe 14. Wählen Sie anschließend passende Konstanten $F_0, F_1$.