Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 6

Aufgabe 16

Sei $A : D(A) \to H$ ein symmetrischer linearer Operator im Hilbertraum H, welcher eine Orthonormalbasis von Eigenelementen von A besitzt. Die dazugehörigen Eigenwerte seien mit $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet und es gelte $\lambda_n \to \infty \quad (n \to \infty)$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und ein $u \in D(A)$, $\|u\| = 1$ gegeben. Ferner seien $\delta := \|Au - \gamma u\|$ und $\gamma := \langle Au, u\rangle$. Zeigen Sie, dass aus

$$\delta^2 < (\gamma - a)(b - \gamma)$$

folgt, dass das Interval (a, b) mindestens einen Eigenwert von A enthält.
Hinweis: Aus der Annahme $\lambda_n \notin (a, b) \quad (n \in \mathbb{N})$ folgt:

$$\left\|\left(A - \frac{a+b}{2}\right)u\right\|^2 \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 17

Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < 1\}$. Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u \qquad (u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Berechnen Sie mittels Rayleigh-Ritz-Verfahrens eine obere Schranke für den ersten Eigenwert. Verwenden Sie dabei die numerischen Basiselemente

a) $\tilde{u}_1(x) = 1 - |x|^2$, $\tilde{u}_2(x) = 1 - |x|^4$.

b) $\tilde{u}_1(x) = 1 - |x|^2$, $\tilde{u}_2(x) = x_1(1 - |x|^2) \ \ \tilde{u}_3(x) = x_2(1 - |x|^2)$.

Aufgabe 18

Sei A wie in Aufgabe 16. Es gelte

$$\lambda_n \leq \mu < \lambda_{n+1} \leq \cdots \leq \lambda_{n+l} < \nu \leq \lambda_{n+l+1}$$

für $n, l \in \mathbb{N}$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Ferner seien $\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_l \in D(A)$ gegeben mit

$$\langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_j\rangle = \delta_{ij}$$

$$\langle A\tilde{u}_i, \tilde{u}_j\rangle = \delta_{ij}\eta_i$$

für $i, j \in \{1, \cdots, l\}$, wobei $\mu < \eta_1 \leq \cdots \leq \eta_l < \nu$ gelte. Beweisen Sie die folgende Clusterversion des Einschließungssatzes von Kato:

$$\eta_i - \sum_{j=1}^{l} \frac{\varepsilon_j^2}{\nu - \eta_j} \leq \lambda_{n+i} \leq \eta_i + \sum_{j=1}^{l} \frac{\varepsilon_j^2}{\mu - \eta_j} \qquad (i = 1, \cdots l).$$

Hierbei sind die Defekte ε_i gegeben durch $\varepsilon_i := \|A\tilde{u}_i - \eta_i\tilde{u}_i\|$.