Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 7

Aufgabe 19

Sei $A : D(A) \to H$ ein symmetrischer linearer Operator im Hilbertraum H, welcher eine Orthonormalbasis von Eigenelementen von A besitzt. Die dazugehörigen Eigenwerte seien mit $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet und es gelte $\lambda_n \to \infty \quad (n \to \infty)$. Beweisen Sie das Max-Min-Prinzip:

$$\lambda_1 = \inf_{u\in D(A),\, u\neq 0} \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle u, u\rangle}$$

$$\lambda_{n+1} = \max_{v_1,\ldots,v_n\in H} \quad \inf_{\substack{u\in[v_1,\ldots,v_n]^\perp \\ u\in D(A),\, u\neq 0}} \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Aufgabe 20

Sei A wie in Aufgabe 19.Sei $u_0 \in D(A)$ und $\tilde{H} = [u_0]^\perp$. Zeigen Sie:

a) $D(A) \cap \tilde{H}$ liegt dicht in $\tilde{H}$

b) Unter der Voraussetzung, dass der Operator

$$\tilde{A} : D(A) \cap \tilde{H} \to \tilde{H}, \tilde{A}u = P_{\tilde{H}} Au$$

ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenelementen besitzt, gilt:

$$\lambda_1 \le \mu_1 \le \lambda_2 \le \mu_2 \le \cdots$$

für die Eigenwerte $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ von $\tilde{A}$. $P_{\tilde{H}}$ ist die orthogonale Projektion auf $\tilde{H}$.

Aufgabe 20

Sei A wie in Aufgabe 19. Sei $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty \subset D(A)$ eine vollständige Orthonormalbasis von H und es gelte

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle A \sum_{i=1}^{N} \langle \psi_i, \phi_1\rangle \psi_i, \sum_{j=1}^{N} \langle \psi_j, \phi_1\rangle \psi_j \right\rangle = \lambda_1.$$

Hierbei sei ϕ_1 der normierte Eigenvektor zu λ_1. Ferner sei $\lambda_1^{(N)}$ der kleineste Eigenwert des Problems

$$A^{(N)} c = \lambda c \qquad (c \in \mathbb{C}^N)$$

mit $A_{ij}^{(N)} = \langle A\psi_i, \psi_j\rangle$. Beweisen Sie:

$$\lambda_1 = \lim_{N\to\infty} \lambda_1^{(N)}.$$