Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 8

Aufgabe 22 (Optimalität des Rayleigh-Ritz-Verfahrens)

Sei A wie in den Aufgaben zuvor. Es seien $\tilde{u} \in D(A)$, $\|\tilde{u}\| = 1$, $\tilde{\lambda} = \langle A\tilde{u}, \tilde{u}\rangle$ und $\delta := \|A\tilde{u} - \tilde{\lambda}\tilde{u}\|$. Ferner sei $d := \delta^{-1}(A\tilde{u} - \tilde{\lambda}\tilde{u})$ sowie E der von $\tilde{u}$ und d aufgespannte Unterraum von H.

a) Beweisen Sie für jedes $t < \tilde{\lambda}$ die Existenz eines linearen Operators $B_t : E \to E$, für den $B_t\tilde{u} = A\tilde{u}$ gilt und $B_t - tI$ positiv semidefinit ist.

b) Für $t < \tilde{\lambda}$ bezeichne μ_t den kleinsten Eigenwert des Operators

$$A_t = B_t P_E + t P_{E^\perp}.$$

Zeigen Sie: $\mu_t = t$. Dabei sei P_U die Orthogonalprojektion auf den Unterraum U.

c) Beweisen Sie: Ein Verfahren, welches für jeden symmetrischen Operator A allein aus $\tilde{u} \in D(A) \setminus \{0\}$ und $A\tilde{u}$ eine obere Schranke $S(\tilde{u}, A\tilde{u})$ für den kleinsten Eigenwert $\lambda_1[A]$ liefert, erfüllt notwendigerweise

$$\frac{\langle A\tilde{u}, \tilde{u}\rangle}{\langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle} \leq S(\tilde{u}, A\tilde{u}).$$

Aufgabe 23

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader. Betrachten Sie das elliptische Problem

$$(*) \qquad -\nabla(P\nabla u) + qu = \lambda u, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

in schwacher Formulierung. Dabei sei $P(x)$ positiv definite Matrix mit $P_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ und $q \in C^1(\overline{\Omega})$.

a) Vergewissern Sie sich, dass eine ONB aus Eigenelementen in $L^2(\Omega)$ existiert und dass die Folge der Eigenwerte gegen $+\infty$ konvergiert.

b) Konstruieren Sie eine Homotopie, welche die in der Vorlesung genannten Eigenschaften hat und $(*)$ mit einem geeigneten Startproblem verbindet.

Aufgabe 24

Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -u'' + \sin(x)u - \lambda u = 0 & \text{in } (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie mittels Rayleigh-Ritz-Verfahrens und Temple-Lehmann-Verfahrens eine Einschließung für den ersten Eigenwert. Berechnen Sie dafür zunächst eine zulässige grobe untere Schranke für den zweiten Eigenwert, indem Sie ein Vergleichsproblem heranziehen.