Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Differentialgleichungen und Hilberträume – Sommersemester 2014
Handout zum Satz von Arzela-Ascoli

Quelle: W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 7. Auflage, Springer, 2000, Kapitel II, §7.

Es sei $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

Definition 1 (gleichgradige Stetigkeit) *Eine Teilmenge $M \subset C([a, b])$ heisst gleichgradig stetig, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert mit*

$$x, \tilde{x} \in [a, b],\ |x - \tilde{x}| < \delta,\ f \in M \Longrightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \epsilon.$$

Die Betonung liegt darauf, dass die Wahl von $\delta(\epsilon)$ für alle $f \in M$ zugleich gelingt.

Satz 2 (Satz von Arzela-Ascoli) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf $[a, b]$ gleichgradig stetige Folge von Funktionen. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt im Raum $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, d.h. für ein $C > 0$ gilt $|f_n(x)| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [a, b]$, dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Die Voraussetzung der gleichgradigen Stetigkeit für die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist z.B. dann erfüllt, falls ein $L > 0$ existiert mit

$$|f_n(x) - f_n(\tilde{x})| \le L|x - \tilde{x}|$$

für alle $x, \tilde{x} \in [a, b]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Eine solche Folge heisst *gleichgradig Lipschitz-stetig* und in diesem Fall kann $\delta(\epsilon) = \epsilon/L$ gewählt werden, d.h. die Wahl von $\delta(\epsilon)$ hängt nicht vom Folgenelement f_n ab.