INSTITUT FÜR ANALYSIS
KARLSRUHE INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

Prof.Dr. Wolfgang Reichel

Differentialgleichungen und Hilberträume – Sommersemester 2014
Handout über Anfangswertprobleme

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für eine vektorwertige Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $t_0 \in I$:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Dabei sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, y_0) \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Wir schreiben (t, y) für ein Element aus D mit $t \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^n$.

Definition AWP.1 *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion und $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.*

(a) f heißt Lipschitz-stetig bzgl. der Variablen y, wenn ein $L > 0$ existiert mit

$$|f(t, y) - f(t, z)| \le L|y - z| \text{ für alle } (t, y), (t, z) \in D.$$

(b) f heißt lokal Lipschitz-stetig bzgl. der Variablen y, wenn für jeden Punkt $(\bar{t}, \bar{y}) \in D$ ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$ existiert mit

$$|f(t, y) - f(t, z)| \le L|y - z| \text{ für alle } (t, y), (t, z) \in D \text{ mit } |t - \bar{t}|, |y - \bar{y}|, |z - \bar{y}| < \delta.$$

Satz AWP.2 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz; Satz von Picard-Lindelöf)
Sei $a > 0$, $f : [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich y sowie $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (1) genau eine Lösung in $[t_0, t_0 + a]$.

Bemerkung: Falls $f : [t_0 - a, t_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bzgl. y ist, so besitzt (1) genau eine Lösung auf $[t_0 - a, t_0]$.

Satz AWP.3 (lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf)
Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y sowie $(t_0, y_0) \in D$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (1) eine eindeutige "lokale" Lösung, d.h $\exists \epsilon > 0$, so dass auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ genau eine Lösung von (1) existiert.

Lemma AWP.4 *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Betrachte die DGL*

$$y' = f(t, y). \tag{2}$$

(a) Ist y Lösung von (2) auf $I = (a, b)$ und $\mathrm{graph}(y) \subset A \subset D$ mit einer kompakten Menge A, dann lässt sich y als Lösung von (2) auf $[a, b]$ fortsetzen.

(b) y sei Lösung von (2) auf $[a, c]$ und z sei Lösung von (2) auf $[c, b]$ mit $y(c) = z(c)$. Dann ist

$$w(t) = \begin{cases} y(t), & a \le t \le c \\ z(t), & c \le t \le b \end{cases}$$

Lösung von (2) auf $[a, c]$.

Beweis: (a) Da f auf A beschränkt ist, ist y' auf (a, b) beschränkt und damit y auf (a, b) gleichmäßig stetig. Deshalb existieren die Grenzwerte $\alpha = \lim_{t \to a+} y(t)$ und $\beta = \lim_{t \to b-} y(t)$ und durch $y(a) := \alpha$, $y(b) := \beta$ wird y stetig auf $[a, b]$ fortgesetzt. Es gilt

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \text{ für alle } t \in (a, b)$$

und durch Grenzübergang auch für alle $t \in [a, b]$. Betrachtet man die für alle $t \in [a, b]$ gültige Integralgleichung, so stellt man fest, dass die einseitige Ableitungen $y'_+(a), y'_-(b)$ existieren mit $y'_+(a) = f(a, y(a))$, $y'_-(b) = f(b, y(b))$.

(b) Es gilt für die einseitigen Ableitungen $w'_-(c) = y'_-(c) = f(c, y(c))$ sowie $w'_+(c) = z'_+(c) = f(c, z(c))$. Nach Voraussetzung gilt $f(c, y(c)) = f(c, z(c))$, d.h. $w'(c)$ existiert und $w'(c) = f(c, w(c))$. ∎

Definition AWP.5 (Nicht fortsetzbare Lösung) *Eine Lösung $y : J \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (1) auf dem Intervall J heißt nicht-fortsetzbar, falls für jede Lösung $\tilde{y} : \tilde{J} \to \mathbb{R}^n$ von (1) auf dem Intervall $\tilde{J}$ gilt:*

$$\tilde{J} \subset J \text{ und } y|_{\tilde{J}} = \tilde{y}.$$

Satz AWP.6 (Existenz nicht fortsetzbarer Lösungen) *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y sowie $(t_0, y_0) \in D$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (1) eine eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung.*

Beweis: Teil 1: Seien $y, \tilde{y}$ zwei Lösungen von (1) auf $J, \tilde{J}$. Dann gilt $y = \tilde{y}$ auf $J \cap \tilde{J}$. Um dies einzusehen nehmen wir an, es gäbe ein $\bar{t} \in J \cap \tilde{J}$ mit $y(\bar{t}) \neq \tilde{y}(\bar{t})$. O.B.d.A ist $\bar{t} > t_0$. Sei $t_1 = \inf\{t > t_0, t \in J \cap \tilde{J} : y(t) \neq \tilde{y}(t)\}$. Dann ist $y(t) = \tilde{y}(t)$ auf $[t_0, t_1]$ (beachte: $t_0 = t_1$ ist nicht ausgeschlossen). Setzte $y_1 := y(t_1) = \tilde{y}(t_1)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$z' = f(t, z), \quad z(t_1) = y_1$$

eine eindeutige lokale Lösung z auf $[t_1, t_1 + \epsilon]$ für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$. Da $y, \tilde{y}$ dasselbe AWP wie z lösen, muss gelten $z = y = \tilde{y}$ auf $[t_1, t_1 + \epsilon']$ mit hinreichend kleinem $\epsilon' \in (0, \epsilon]$. Dies widerspricht der Konstruktion von t_1.

Teil 2: Sei $M = \{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine geeignete Indizierung aller Lösungen $y_\alpha : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ von (1) auf Intervallen I_α. Dann ist auch $J := \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ ein Intervall. Für $t \in J$ definiere $Y(t) := y_\alpha(t)$ falls $t \in I_\alpha$. Dadurch ist Y zunächst einmal wohldefiniert – siehe dazu Teil 1 dieses Beweises, denn damit gilt $y_\alpha = y_\beta$ auf $I_\alpha \cap I_\beta$. Außerdem löst Y das AWP (1) und Y ist auf dem größtmöglichen Intervall definiert und somit nicht-fortsetzbar. ■

Satz AWP.7 *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y sowie $(t_0, y_0) \in D$. Für die eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung y von (1) gilt:*

(a) y existiert "nach rechts" auf $[t_0, b)$ (dabei ist $b = \infty$ zugelassen).

(b) Es gilt eine der beiden Alternativen:

(i) $b = \infty$

(ii) $b < \infty$ und $\lim\limits_{t\to b-} |y(t)| = \infty$ oder $\operatorname{dist}\big((t, y(t)), \partial D\big) \overset{t\to b-}{\to} 0$

Beweis: Angenommen es gilt $b < \infty$, d.h. y exisitert auf $[t_0, b)$ oder $[t_0, b]$ und es gilt

$$y \text{ beschränkt und } \operatorname{dist}\big((t, y(t)), \partial D\big) \geq \delta > 0 \text{ auf } [t_0, b).$$

Dann ist y auf $[t_0, b]$ fortsetzbar wegen Satz AWP.4(a) und wegen $\operatorname{dist}\big((b, y(b), \partial D\big) \geq \delta$ folgt $(b, y(b)) \in D$. Deshalb besitzt das Anfangswertproblem

$$z' = f(t, z), \quad z(b) = y(b)$$

eine eindeutige Lösung z auf $[b, b + \epsilon]$ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$. Dann ist aber

$$w(t) = \begin{cases} y(t), & t_0 \leq t \leq b \\ z(t), & b \leq t \leq b + \epsilon \end{cases}$$

nach Lemma AWP.4(b) ein Fortsetzung von y, was unmöglich ist. ■

Beispiele im Fall $n = 1$:

$y' = y, y(0) = 1, D = \mathbb{R}^2$.
Die Lösung ist $y(t) = e^t$, sie existiert auf $[0, \infty)$; es liegt Fall (i) vor.

$y' = y^2, y(0) = 1, D = \mathbb{R}^2$.
Die Lösung ist $y(t) = \frac{1}{1-t}$, sie existiert auf $[0, 1)$; es liegt die erste Möglichkeit im Fall (ii) vor.

$y' = \frac{1}{1-t}y, y(0) = 1, D = (-\infty, 1) \times \mathbb{R}$.
Die Lösung ist $y(t) = \frac{1}{1-t}$, sie existiert auf $[0, 1)$, es liegt im Fall (ii) sowohl die erste als auch die zweite Möglichkeit vor.

$y' = -\frac{1}{2y}, y(0) = 1, D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$.
Die Lösung ist $y(t) = \sqrt{1-t}$, sie existiert auf $[0, 1)$, es liegt die zweite Möglichkeit im Fall (ii) vor.

Abschließend geben wir (ohne Beweis) den Existenzsatz von Peano an, der ohne Voraussetzung einer Lipschitzbedingung die Existenz von Lösungen des Anfangswertproblems (1) garantiert.

Satz AWP.8 (Existenzsatz von Peano) *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig sowie $(t_0, y_0) \in D$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (1) eine "lokale" Lösung, d.h $\exists \epsilon > 0$, so dass auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ eine Lösung von (1) existiert. Diese Lösung kann man so auf ein maximales Intervall $[t_0, b)$ fortsetzen, dass die Alternativen (i) und (ii) aus Satz AWP.7 (b) gelten.*

Bemerkung: Im Allgemeinen geht unter den Bedingungen des Satzes von Peano die eindeutige Lösbarkeit von (1) verloren. Z.B. hat das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{|y|}$ mit $y(t_0) = 0$ unendlich viele Lösungen.