Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Riccatische Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$$

mit stetigen Funktionen $a, b, c : I \to \mathbb{R}$. Sei y_0 eine explizit bekannte Lösung und y ein beliebige Lösung.

(i) Zeigen Sie, daß $z := y - y_0$ die Differentialgleichung

$$(+) \qquad z' = \big(a(x) + 2y_0(x)b(x)\big)z + b(x)z^2$$

erfüllt.

(ii) Wählen Sie zur Lösung von $(+)$ den Ansatz $z = 1/w$ und finden Sie die lineare Differentialgleichung, die w erfüllt.

(iii) Lösen Sie auf diese Weise die Riccatische Differentialgleichung

$$y' = y - y^2 - c \quad \text{mit } 0 \le c \le 1/4.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Fischerei-Modell: Eine Population u von Fischen genüge dem logistischen Wachstumsgesetz $\dot{u} = u(\alpha - \beta u)$ mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$. Nun werden Fische mit konstanter Rate $\gamma =$ Anzahl Fische/Zeiteinheit > 0 gefangen. Damit ergibt sich die neue Differentialgleichung

$$\dot{u} = u(\alpha - \beta u) - \gamma. \qquad (*)$$

a) Bringen Sie $(*)$ durch eine geeignete Transformation auf die Form

$$\dot{v} = v(1 - v) - \gamma'. \qquad (**)$$

b) Finden Sie alle trivialen (=zeitlich konstanten) Lösungen.

c) Lösen Sie $(**)$ für $0 < \gamma' < 1/4$. Hinweis: Aufgabe 1. Untersuchen Sie das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$.

d) Zeigen Sie, dass die Population in endlicher Zeit ausstirbt, wenn $\gamma' > 1/4$ ist. *Hinweis*: $v(1 - v) \le 1/4$.

e) Der Wert $\gamma' = 1/4$ bzw. $\gamma = \alpha^2/(4\beta)$ heißt größt möglicher nachhaltiger Ertrag. Warum?

Abgabefrist: Montag, den 28. April, in der Übungstunde.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.