

Differentialgleichungen und Hilberträume Sommersemester 2014

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

(3 Punkte)

Bestimmen Sie ein erstes Integral für das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 e^y + 1, \\ \dot{y} &= 1 - 2x e^y.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Gleichung

$$\ddot{u} = u^3 + u \quad (*)$$

und formulieren Sie diese Gleichung als System erster Ordnung.

- Bestimmen Sie ein erstes Integral H für das System erster Ordnung und skizzieren Sie das Phasendiagramm.
- Zeigen Sie: es existieren nichttriviale Lösungen u von $(*)$ mit $u(t), u'(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Für jede andere nichttriviale Lösung gilt: es existiert ein $T_0 < \infty$ mit $\lim_{t \rightarrow T_0} |u(t)| = \infty$ und $\lim_{t \rightarrow T_0} |u'(t)| = \infty$.

Aufgabe 3

(5 Punkte)

Betrachten Sie die Gleichung

$$\ddot{u} = -u^3 + u \quad (*)$$

und formulieren Sie diese Gleichung als System erster Ordnung.

- Bestimmen Sie ein erstes Integral H für das System erster Ordnung und skizzieren Sie das Phasendiagramm.
- Zeigen Sie: es existieren nichttriviale Lösungen u von $(*)$ mit $u(t), u'(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \pm\infty$. Jede andere nichttriviale Lösung ist periodisch oder konstant gleich 1 oder -1 .
- Bestimmen Sie explizit diejenigen Lösungen mit $u'(0) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t) = 0$.

Abgabefrist: Montag, den 5. Mai, in der Übungstunde.

Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.