Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie das System

$$(*) \qquad \dot{u} = f(u)$$

mit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *positiv invariant* für $(*)$, falls aus $u(0) \in M$ auch $u(t) \in M$ für $0 \le t < T_{max}$ folgt, wobei T_{max} das entsprechende maximale Existenzintervall der Lösung ist.

Sei $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\nabla V(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $V(x) = 0$. Zeigen Sie: falls die Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \le 0\}$ positiv invariant ist, dann gilt

$$\nabla V(x) \cdot f(x) \le 0$$

für alle $x \in \partial M$ gilt. Was bedeutet dieses Ergebnis geometrisch?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \arctan(x^2 + y^2), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= x + \tanh y, & y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung auf $[0, \infty)$ hat, wobei $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig sind. Bestimmen Sie Konstanten $a, b, c, d > 0$ so, dass gilt

$$|x(t)| \le a + bt, \quad |y(t)| \le c + dt^2 \text{ für alle } t \ge 0.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{u} = f(u), \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = b.$$

Dabei ist $a > 0, b \ge 0$, $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ lokal Lipschitz-stetig mit $f(s) > 0$ für $s > 0$. Für die Stammfunktion F von f gelte

$$\int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{F(s)}} < \infty, \text{ für ein } s_0 > 0.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{t \to T-} u(t) = \infty$$

für

$$T = \int_a^\infty \frac{ds}{\sqrt{2F(s) - 2F(a) + b^2}}.$$

Abgabefrist: Montag, den 12. Mai, 15:45.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.