Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wir betrachten eine räumlich gleichmäßig verteilte Population, deren Mitglieder von einer Krankheit befallen werden können. Wir setzen voraus, dass sich die Ansteckung mit einer konstanten Infektionskontaktrate $r > 0$ vollziehe und dass eine Heilung von der Krankheit mit einer festen Pro-Kopf-Rate $a > 0$ eintrete. Weitere Effekte werden nicht betrachtet.

In zeitlicher Abhängigkeit gebe die Funktion S die Zahl der gesunden, jedoch infizierbaren Individuen (der sog. Suszeptiblen), I die Zahl der Infiziösen und R die Zahl der genesenen (engl.: recovered) Individuen an. Das sog. epidemische SIR-Modell von Kermack und McKendrick beschreibt die zeitliche Ausbreitung der Krankheit durch das System

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -rSI, && t \geq 0, \\ \dot{I} &= rSI - aI, && t \geq 0, \\ \dot{R} &= aI, && t \geq 0, \end{aligned}$$

mit gegebenen Werten $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 \geq 0$ und $R(0) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Gesamtzahl der Individuen $S + I + R$ sowie die Zahl $R + \frac{a}{r} \ln S$ zeitlich konstant bleibt.

b) Zeigen Sie, dass dieses System eine eindeutige, global nach rechts existierende, beschränke Lösung besitzt, die zudem $S, R, I \geq 0$ erfüllt.

c) Zeigen Sie: aus $S_0 > 0$ folgt bereits $S(t) > 0$ für alle $t \geq 0$. Gleiches gilt für I.

d) Unter welchen Bedingungen an a, r, I_0, S_0 liegt eine Epidemie (=Wachstum von I) vor? Bestimmen Sie im Fall der Epidemie die maximal Zahl der gleichzeitig Infizierten $I_{max} = I_{max}(a, r, I_0, S_0)$. *Hinweis:* Bestimmen Sie das Phasendiagramm des S, I-Teilsystems. Es gibt ein erstes Integral (siehe Teil a)).

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $f \in C(I)$ lokal Lipschitz-stetig mit $f(0) = 0$. Beweisen Sie die nachfolgenden Behauptungen über das autonome Anfangswertproblem

$$\dot{y} = f(y), \qquad y(0) = y_0.$$

a) Es sei zusätzlich vorausgesetzt, dass ein $r > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in (-r, r) \setminus \{0\}$ existiere. Das Equilibrium 0 ist genau dann asymptotisch stabil ist, wenn $f < 0$ auf $(0, r)$ und zugleich $f > 0$ auf $(-r, 0)$ erfüllt ist. In allen übrigen Fällen, in denen f links und rechts von 0 ein festes Vorzeichen hat, ist 0 instabil.

b) Existiert eine Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $I \setminus \{0\}$ mit $f(x_n) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist 0 nicht asymptotisch stabil.

c) Existieren Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $x_n < 0 < y_n$ und mit $f(x_n) = f(y_n) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist 0 stabil.

Abgabefrist: Montag, den 19. Mai, 15:45.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.
Klausurtermin: 12. August, 10.00 Uhr – 12.00 Uhr bzw. 10.00 Uhr – 11.00 Uhr