Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 5

Aufgabe 1
(2 Punkte)

Zeigen Sie den folgenden Spezialfall des sog. Routh-Hurwitz-Kriteriums: Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so haben alle (komplexen) Eigenwerte von A genau dann einen strikt negativen Realteil, wenn $\det A > 0$ und $\operatorname{spur} A < 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 2
(4 Punkte)

Die sog. Lorenzsche Gleichung lautet

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x) \\
\dot{y} &= rx - y - xz \\
\dot{z} &= xy - bz,
\end{aligned}$$

wobei σ, r und b positive Konstanten sind. Zeigen Sie:

a) Der Nullpunkt ist ein stationärer Punkt für alle Parameterwerte. Für $0 < r < 1$ ist er asymptotisch stabil. Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $V(x, y, z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$.

b) Für $r > 1$ ist der Nullpunkt instabil.

Aufgabe 3
(6 Punkte)

Wir betrachten den sog. Brusselator[1]

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= a - bx + x^2 y - x \\
\dot{y} &= bx - x^2 y,
\end{aligned}$$

wobei $a, b > 0$.

a) Zeigen Sie: ist $(x(t), y(t))$ ein Lösung mit $x(t_0), y(t_0) \geq 0$ so gilt $x(t) > 0, y(t) > 0$ für alle $t > t_0$. Hinweis: Zeigen Sie: Falls $x(t_1) < 0$ für ein $t_1 > t_0$ dann existiert ein $t_2 \in (t_0, t_1)$ mit $x(t_2) = 0, \dot{x}(t_2) \leq 0$. Dies widerspricht der Differentialgleichung. Ähnlich argumentiert man für $y(t)$.

[1] Dieses Modell wurde von dem Physiknobelpreisträger I. Prigogine, dem Mathematiker G.Nicolis und deren Mitarbeitern zur Beschreibung chemischer Oszillationen eingeführt. Das Wort "Brusselator" ist ein Kofferwort, welches aus den Wörtern "oscillator" und "Brussels" ("Brüssel") entstanden ist (Prigogine war zu jener Zeit an der Freien Universität Brüssel tätig. Daher ist im deutschsprachigen Raum auch der Begriff "Brüsselator" gebräuchlich.)

b) Beweisen Sie, dass jede Lösung mit $x(t_0), y(t_0) \geq 0$ global nach rechts für alle $t \geq t_0$ existiert. Hinweis: Betrachten Sie $z(t) := x(t) + y(t)$ und zeigen Sie die Beschränktheit von z auf kompakten Zeitintervallen $[t_0, T]$.

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte und untersuchen Sie deren Stabilitätsverhalten für den Fall $a^2 + 1 \neq b$. Hinweis: Aufgabe 1 könnte hilfreich sein.

Abgabefrist: Montag, den 26. Mai, 15:45.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.
Klausurtermin: 12. August, 14.00 Uhr – 16.00 Uhr bzw. 14.00 Uhr – 15.00 Uhr