Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Man bestimme alle stationären Lösungen des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y(z-1),\\ \dot{y} &= -x(z-1),\\ \dot{z} &= -z^3.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie durch geeignete Wahl von $a, b, c > 0$ eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$. Ist die triviale Lösung stabil bzw. asymptotisch stabil?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $T > 0$. Bestimmen Sie alle $\omega \in \mathbb{R}$, für welche das Randwertproblem (mit periodischen Randbedingungen)

$$\begin{cases} u'' + \omega u = f(t), \quad 0 \le t \le T,\\ u(0) = u(T),\ u'(0) = u'(T)\end{cases}$$

für alle stetigen und T-periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $p \in C^1([a, b])$ mit $p > 0$ und $q, r \in C([a, b])$. Schließlich sei u_0 eine nichttriviale Lösung des homogenen Randwertproblems

$$\begin{cases} (p(t)u')' + q(t)u = 0, \quad a \le t \le b,\\ u(a) = u(b) = 0.\end{cases}$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

a) Es gilt $\int_a^b u_0(t)r(t)\,dt = 0$.

b) Das inhomogene Randwertproblem

$$\begin{cases} (p(t)u')' + q(t)u = r(t), \quad a \le t \le b,\\ u(a) = u(b) = 0.\end{cases}$$

ist lösbar.

Abgabefrist: Montag, den 2. Juni, 15:45.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.
Klausurtermin: 12. August, 14.00 Uhr – 16.00 Uhr bzw. 14.00 Uhr – 15.00 Uhr