Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Greensche Funktion zu der Randwertaufgabe

$$\begin{cases} tu''(t) + u'(t) = 0, & 1 \leq t \leq e, \\ u(1) = u(e) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{$*$}$$

mit einem $\lambda > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $(*)$ genau dann eindeutig lösbar ist, wenn $\lambda \notin \{n^2\pi^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt ist.

b) Bestimmen Sie für $\lambda \notin \{n^2\pi^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, die zu $(*)$ zugehörige Greensche Funktion.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} (p(t)u')'(t) + q(t)u(t) = 0, & a \leq t \leq b \\ -\alpha_0 u'(a) + \beta_0 u(a) = 0, \\ \alpha_1 u'(b) + \beta_1 u(b) = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

mit $p \in C^1[a,b]$, $p \neq 0$ für $a \leq t \leq b$, $q \in C[a,b]$ und $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$. Wir setzen voraus, dass $(*)$ nur die triviale Lösung hat. Zeigen Sie, dass die zu $(*)$ gehörige Greensche Funktion symmetrisch ist, d.h. $G(\xi, \eta) = G(\eta, \xi)$ für alle $a \leq \xi, \eta \leq b$.

Abgabefrist: Dienstag, den 10. Juni, 15:45.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.
Klausurtermin: 12. August, 14.00 Uhr – 16.00 Uhr bzw. 14.00 Uhr – 15.00 Uhr