Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Es sei $c > 0$, $\Omega := \mathbb{R} \times [0, \infty)$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C(\Omega)$ eine bezüglich der ersten Variablen stetig differenzierbare Funktion. Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) &= f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $E\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$E(t) := \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\, dx$$

für jede Lösung u von $(*)$ mit $f = 0$ konstant ist, falls $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x,t) \neq 0\}$ für alle $t \in [0, \infty)$ beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) := \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi \right) d\tau, \quad (x,t) \in \Omega$$

die einzige Lösung von $(*)$ mit $u_0 = u_1 = 0$ ist.

c) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $(*)$ genau eine Lösung besitzt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) &= x^2, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty), \\ u(x,0) &= x, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, zunächst eine von t unabhängige Lösung der partiellen Differentialgleichung $u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = x^2$ zu bestimmen.

Abgabefrist: Montag, den 16. Juni, 15:45.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.
Klausurtermin: 12. August, 14.00 Uhr – 16.00 Uhr bzw. 14.00 Uhr – 15.00 Uhr