Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume Sommersemester 2014

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ definieren wir

$$||x|| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right|.$$

Zeigen Sie, dass $(\ell_1, ||\cdot||)$ ein normierter Raum ist.

b) Es sei c_0 der Vektorraum aller Nullfolgen, d.h. $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Zeigen Sie $\bigcup_{1\le p<\infty} \ell^p \subset c_0$. Ist die Inklusion echt?

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$. Zu einem Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ sei

$$||p|| := \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

(a) Zeigen Sie: $(\mathcal{P}, ||\cdot||)$ ist ein normierter Raum. Ist dieser ein Banachraum?

(b) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Abbildungen $T_i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind und ermitteln Sie $||T_i||$ (i=1,2,3):

$$T_1(p) = \int_0^1 p(t)dt, \quad T_2(p) = p'(0), \quad T_3(p) = p'(1).$$

(c) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Abbildungen $T_i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ stetig sind und ermitteln Sie $||T_i||$ (i=4,5,6):

$$(T_4 p)(t) = \int_0^t p(s)ds, \quad T_5 p = p', \quad (T_6 p)(t) = p(t+1).$$

Abgabefrist: Montag, den 23. Juni, 15:45.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.
Klausurtermin: 12. August, 14.00 Uhr – 16.00 Uhr bzw. 14.00 Uhr – 15.00 Uhr