Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Menge $A \subset X$ heisst offen, falls für jedes $x \in A$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $\{y \in X : \|x-y\| < \epsilon\} \subset A$.

a) Zeigen Sie, dass $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $A^c = X \setminus A$ offen ist.

b) Zeigen Sie, dass für $A \subset X$ gilt

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{B \supset A \\ B = \overline{B}}} B.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Es sei $1 \le p \le \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare, beschränkte Menge. Zeigen Sie, dass die Menge

$$U := \left\{ f \in L^p(\Omega) \mid \int_\Omega f\,dx = 0 \right\}$$

eine abgeschlossener Unterraum des normierten Raums $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ ist.

b) Nun sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und

$$U := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \mid \int_\Omega f\,dx = 0 \right\}.$$

Gilt dieselbe Aussage wie unter a)?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Lebesgue-messbar. Zeigen Sie die Stetigkeit der folgenden linearen Operatoren und berechnen Sie ihre Operator-Norm.

a) $\mathrm{Id}\colon L^q(\Omega) \to L^p(\Omega), \quad 1 \le p \le q \le \infty,$

b) $A\colon L^p(\Omega) \to \mathbb{R},\ Af := \int_\Omega f\,dx, \quad 1 \le p \le \infty,$

c) $A\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),\ Af := f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,dx.$

Abgabefrist: Montag, den 30. Juni, 15:45.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.
Klausurtermin: 12. August, 14.00 Uhr – 16.00 Uhr bzw. 14.00 Uhr – 15.00 Uhr