Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (5 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um die Frage, ob die Summe abgeschlossener Unterräume wieder abgeschlossen ist. Beweisen Sie dazu die folgenden Aussagen.

a) Es sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, V ein abgeschlossener Unterraum und W ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $\mathcal{H}$. Dann ist auch $V+W$ abgeschlossen.

b) Die Mengen

$$U := \{(x_n)_n \in \ell^2 \mid x_{2k} = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$$
$$V := \{(x_n)_n \in \ell^2 \mid x_{2k-1} = kx_{2k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$$

sind abgeschlossene Unterräume von $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ mit $U \cap V = \{0\}$, deren Summe $U+V$ jedoch nicht abgeschlossen ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $e_n \in U+V$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dann $U+V \subsetneq \ell^2$.

Bemerkung: $V+W = \{v+w : v \in V, w \in W\}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $A \in L(\mathcal{H})$ mit abgeschlossenem Bildraum $A(\mathcal{H})$. Die Gleichung $Ax = y$ ist für $y \notin A(\mathcal{H})$ nicht lösbar. Dafür ist die Gleichung

$$Ax = Py, \quad P\colon \mathcal{H} \to A(\mathcal{H}) \text{ Orthogonalprojektion} \tag{$*$}$$

immer lösbar. Zeigen Sie, dass es eine Lösung von $(*)$ mit kleinster Norm gibt. Bestimmen Sie diese Lösung kleinster Norm im Fall $\mathcal{H} = L^2(-1,1)$, $Ax = 2x - \int_{-1}^{1} x(t)dt$ und $y(t) = t^2$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Rademacher-Funktionen $r_n(t) := \operatorname{sign}\big(\sin(2^n\pi t)\big)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ ein Orthonormalsystem aber keine Orthonormalbasis in $L^2(0,1)$ sind.
Hinweis: Die Funktionen $r_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ sind ungerade bzgl. $t = 1/2$.

Abgabefrist: Montag, den 7. Juli, 15:45.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.
Klausurtermin: 12. August, 14.00 Uhr – 16.00 Uhr bzw. 14.00 Uhr – 15.00 Uhr