Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Betrachten Sie den Raum $C([0,1])$ mit dem Innenprodukt $\langle f, g\rangle := \int_0^1 fg dt$. Zeigen Sie, dass das Funktional $\phi(f) = \int_0^{1/2} f dt$ stetig, aber nicht in der Form $\phi(f) = \langle f, g\rangle$ mit $g \in C([0,1])$ darstellbar ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $B = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: für $n = 2$ ist $\log|x| \notin H^{1,2}(B)$ aber $\log\left(\log\frac{1}{|x|}\right) \in H^{1,2}(B)$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum. Eine Abbildung $B\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ heißt eine Bilinearform auf $\mathcal{H}$, falls B linear in den beiden Argumenten ist. Eine Bilinearform heißt stetig, falls eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$|B(u,v)| \leq c\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

Sei B eine stetige Bilinearform mit

$$|B(u,u)| \geq p\|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}$$

für ein $p > 0$. Zeigen Sie, dass für alle $l \in \mathcal{H}'$ genau ein $u \in \mathcal{H}$ existiert, so dass gilt

$$l(v) = B(v,u) \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Hinweis: Mithilfe des Satzes von Riesz definieren Sie die Abbildung $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $B(v,u) = \langle v, S(u)\rangle$, $\forall u, v \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Isomorphismus (d.h. stetig und bijektiv mit stetigem S^{-1}) ist.

Abgabefrist: Montag, den 14. Juli, 15:45.
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.
Klausurtermin: 12. August, 14.00 Uhr – 16.00 Uhr bzw. 14.00 Uhr – 15.00 Uhr