Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Übungsblatt 13

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein kompakter und symmetrischer Operator und $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von K. Betrachten Sie für $b \in \mathcal{H}$ die lineare Gleichung

$$(*) \qquad (\mathrm{Id} - K)x = b.$$

Zeigen Sie:

(a) Falls 1 kein Eigenwert von K ist, dann besitzt $(*)$ eine eindeutige Lösung x. Bestimmen Sie eine Darstellung von x mit Hilfe der φ_k.

(b) Falls 1 ein Eigenwert von K ist, dann besitzt $(*)$ genau dann eine Lösung, falls $b \perp N(\mathrm{Id} - K)$ ist, wobei $N(\mathrm{Id} - K)$ der Nullraum von $\mathrm{Id} - K$ ist.

Aufgabe 2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen sowie $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$|||u||| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + c(x)|u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

eine Norm auf $H_0^1(\Omega)$ erklärt ist, die zur H_0^1-Norm äquivalent ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-\Delta u + c(x)u = f(x) \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 3

Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$-(x^2u')' = \lambda u \text{ für } 1 \leq x \leq e, \quad u(1) = u(e) = 0.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenfunktionen. Hinweis: $u(x) = v(\ln x)$.

Abgabefrist: keine Abgabe
Übungsschein: Mindestens 50 % aller Punkte müssen erreicht werden.
Klausurtermin: 12. August, 14.00 Uhr – 16.00 Uhr bzw. 14.00 Uhr – 15.00 Uhr