Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Anton Verbitsky

Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Hauptklausur

1. Teil: Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie zwei erste Integrale $H_1(x, y, z)$ und $H_2(x, y, z)$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z^2 - y^2, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -y \end{aligned}$$

mit $H_2 \neq \alpha H_1 + \beta$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Für H_1 benutzen Sie den Ansatz $H_1(x, y, z) = x + h(y, z)$.

Lösung zur Aufgabe 1:

Wir benutzen den Hinweis und suchen H_1 in der Form $H_1(x, y, z) := x + h(y, z)$. Das liefert

$$\frac{d}{dt} H_1(t) = \dot{x} + h_y \dot{y} + h_z \dot{z} = z^2 - y^2 + h_y z - h_z y = z(z + h_y) - y(y + h_z) \stackrel{!}{=} 0.$$

Durch Abgleichen bekommt man $h(y, z) = -yz$ bzw. $H_1(x, y, z) = x - yz$.

Die Gleichungen für $\dot{y}$ und $\dot{z}$ hängen von x nicht ab. Entweder bekommt man direkt anhand des Beispiels im Skript, dass

$$H_2(x, y, z) = H_2(y, z) := y^2 + z^2$$

ein erstes Integral ist oder man benutzt den Ansatz aus dem Skript

$$(\partial_y H_2, \partial_z H_2) = (\lambda(y, z)y, \lambda(y, z)z)$$

mit der Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned} (\lambda y)_z &\stackrel{!}{=} (\lambda z)_y \\ \lambda_z y &\stackrel{!}{=} \lambda_y z \end{aligned}$$

und wählt $\lambda := 1$, woraus folgt

$$\frac{1}{2} y^2 + F(z) = H_2(y, z) = \frac{1}{2} z^2 + G(y).$$

Durch Abgleichen bekommt man $H_2(x, y, z) = \frac{1}{2}(y^2 + z^2)$.

Diese ersten Integrale sind unabhängig in dem Sinne, dass $H_1 \neq F(H_2)$ für alle $F \in C(\mathbb{R})$: die linke Seite hängt von x ab, die rechte dagegen nicht. Für jedes $F \in C^1(\mathbb{R})$ ist aber sowohl $F(H_1)$ als auch $F(H_2)$ wieder ein erstes Integral:

$$\frac{d}{dt}F(H_{1,2}(t)) = F'(H_{1,2}(t))\underbrace{\frac{d}{dt}H_{1,2}(t)}_{=0} = 0.$$

Aufgabe 2

Schreiben Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x - x^2 = 0$$

als System erster Ordnung, bestimmen Sie alle stationären Punkte und untersuchen Sie deren Stabilität.

Lösung zur Aufgabe 2:

Wir bezeichnen $y = \dot{x}$ und bekommen

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 - 2x - y \end{pmatrix} =: f(x, y).$$

Die stationären Punkte sind die Nullstellen der rechten Seite. Wir bekommen aus $y = 0$ und $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$ die Punkte $(0, 0)$ und $(2, 0)$.

Wir untersuchen die Linearisierung ∇f,

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x - 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $(0, 0)$ haben wir

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\lambda(\lambda + 1) + 2 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

d.h. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{7}{4}}$. Die beiden Eigenwerte haben einen negativen Realteil und der Punkt $(0, 0)$ ist somit asymptotisch stabil. Alternativ $\det \nabla f(0, 0) = 2 > 0$, spur $A\nabla f(0, 0) = -1 < 0$ und das Gleiche folgt aus dem Routh-Hurwitz-Kriterium. Analog bekommt man für

$$\nabla f(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom

$$\lambda(\lambda + 1) - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1).$$

Da der zweite Eigenwert $\lambda_2 = 1$ positiv ist, ist der Punkt $(2, 0)$ instabil.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Stabilität der trivialen Lösung des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y^3 - x^5,\\ \dot{y} &= -x - y^3 + y^5\end{aligned}$$

mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $V(x, y) = x^{2\alpha} + y^{2\beta}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Lösung zur Aufgabe 3:

Für $V(x, y) = x^{2\alpha} + y^{2\beta}$ hat man $V(0, 0) = 0$ sowie $V(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= 2\alpha x^{2\alpha-1}\dot{x} + 2\beta y^{2\beta-1}\dot{y} = 2\alpha x^{2\alpha-1}(2y^3 - x^5) + 2\beta y^{2\beta-1}(-x - y^3 + y^5)\\ &= -2\left(\alpha x^{2\alpha+4} + \beta y^{2\beta+2} - \beta y^{2\beta+4}\right) + 2\left[2\alpha x^{2\alpha-1}y^3 - \beta y^{2\beta-1}x\right].\end{aligned}$$

Wir wollen, dass der gemischte Term in den eckigen Klammern überall verschwindet:

$$2\alpha x^{2\alpha-1}y^3 - \beta y^{2\beta-1}x \overset{!}{\equiv} 0.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}2\alpha &= \beta,\\ 2\alpha - 1 &= 1,\\ 2\beta - 1 &= 3,\end{aligned}$$

d.h. $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ und $V(x, y) = x^2 + y^4$. Damit hat man

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = -2(x^6 + 2y^6 - 2y^8) = -2(x^6 + 2y^6(1 - y^2)) \leq 0$$

in jeder Umgebung von $(0, 0)$ mit $y^2 \leq 1$. Darüber hinaus, in jeder Umgebung mit $y^2 < 1$ folgt aus

$$-2(x^6 + 2y^6\underbrace{(1 - y^2)}_{>0}) = 0$$

bereits $(x, y) = (0, 0)$. Dies impliziert, dass $(0, 0)$ ein asymptotisch stabiler stationärer Punkt ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{aligned}u''(x) + 3u'(x) + 2u(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \ln 2,\\ u(0) = 0, u(\ln 2) + u'(\ln 2) = 0\end{aligned}$$

nur die triviale Lösung hat und konstruieren Sie die zugehörige Greensche Funktion.

Lösung zur Aufgabe 4:

Das charakteristische Polynom der Gleichung

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

liefert zwei linear unabhängige Lösungen e^{-x} und e^{-2x} und die allgemeine Lösung ist $C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} R_1[u] &:= u(0) \\ R_2[u] &:= u(\ln 2) + u'(\ln 2). \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass nur die triviale Lösung $C_1 = C_2 = 0$ das Randwertproblem erfüllt. In der Tat, erfüllt $u = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ die Randbedingungen $R_1[u] = R_2[u] = 0$, dann ist die Matrix zur Bestimmung von C_1, C_2 invertierbar:

$$\det \begin{pmatrix} R_1[e^{-x}] & R_1[e^{-2x}] \\ R_2[e^{-x}] & R_2[e^{-2x}] \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{-1\cdot 0} & e^{-2\cdot 0} \\ e^{-1\cdot\ln 2} - e^{-1\cdot\ln 2} & e^{-2\cdot\ln 2} - 2e^{-2\cdot\ln 2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir konstruieren nun zwei Lösungen φ, ψ mit $R_1[\varphi] = R_2[\psi] = 0$ und $R_2[\varphi] = R_1[\psi] = 1$. Für $\varphi(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x}$ bekommt man

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und für $\psi(x) = \beta_1 e^{-x} + \beta_2 e^{-2x}$ bekommt man

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $W[\varphi, \psi]$:

$$W[\varphi, \psi](x) = \det \begin{pmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4e^{-x} - 4e^{-2x} & e^{-x} \\ -4e^{-x} + 8e^{-2x} & -e^{-x} \end{pmatrix} = 4e^{-3x} - 8e^{-3x} = -4e^{-3x}.$$

Die Greensche Funktion hat also die Gestalt

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta) &= \frac{1}{W(\eta)} \begin{cases} \varphi(\xi)\psi(\eta), & \text{für } 0 \le \xi \le \eta \le \ln 2 \\ \varphi(\eta)\psi(\xi), & \text{für } 0 \le \eta \le \xi \le \ln 2 \end{cases} \\ &= -\frac{e^{3\eta}}{4} \begin{cases} 4e^{-\eta}(e^{-\xi} - e^{-2\xi}), & \text{für } 0 \le \xi \le \eta \le \ln 2 \\ 4e^{-\xi}(e^{-\eta} - e^{-2\eta}), & \text{für } 0 \le \eta \le \xi \le \ln 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{2\eta}(e^{-2\xi} - e^{-\xi}), & \text{für } 0 \le \xi \le \eta \le \ln 2 \\ e^{-\xi}(e^{\eta} - e^{2\eta}), & \text{für } 0 \le \eta \le \xi \le \ln 2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Teil: Hilberträume

Aufgabe 5

Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ und sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Beweisen Sie, dass der Operator $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$Av := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle v, v_n\rangle v_n, \quad v \in \mathcal{H}$$

wohldefiniert und beschränkt ist mit

$$\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|.$$

Lösung zur Aufgabe 5:

Die Existenz einer Orthonormalbasis liefert die Separabilität von $\mathcal{H}$. Nach dem Satz von Fischer-Riesz sind alle separablen Räume isometrisch isomorph zu l_2 (und dadurch zueinander). Das heißt: für jedes $v \in \mathcal{H}$ liegt $(\langle v, v_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ in l_2 mit $\|v\|_{\mathcal{H}} = \|(\langle v, v_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\|_{l_2}$ und umgekehrt, für jedes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$ liegt $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n v_n$ in $\mathcal{H}$. Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle v, v_n\rangle v_n$ dann und genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \langle v, v_n\rangle|^2$ konvergiert. (Bemerkung: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \langle v, v_n\rangle|$ kann dabei divergieren.) Aus der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \langle v, v_n\rangle|^2 \le \sup_n |\alpha_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, v_n\rangle|^2 \le \sup_n |\alpha_n|^2 \|v\|^2$$

bekommt man also die Wohldefiniertheit.

Nach der Parsevalschen Gleichheit gilt

$$\|Av\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_n \langle v, v_n\rangle|^2 \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\langle v, v_n\rangle|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \|v\|^2,$$

d.h. $\|A\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$. Wir nehmen zuerst an, dass dieses Supremum angenommen wird, $|\alpha_k| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$ mit einem $k \in \mathbb{N}$. Dann

$$\|Av_k\| = \|\alpha_k v_k\| = |\alpha_k| \|v_k\|,$$

d.h. $\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$. Nehmen wir nun an, dass das Supremum nicht angenommen wird. Dann existiert eine Teilfolge $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|\alpha_{n_k}| \to \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$. Dies liefert

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\|Av_{n_k}\|}{\|v_{n_k}\|} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_{n_k}| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|.$$

Man kann auch sofort schreiben

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|Av_n\|}{\|v_n\|} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|.$$

Aufgabe 6

Seien $U, V \subset \mathcal{H}$ zwei abgeschlossene Unterräume eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ mit $\langle u, v\rangle = 0$ für alle $u \in U$, $v \in V$. Zeigen Sie, dass $U \cap V = \{0\}$ und die Summe $U + V$ abgeschlossen ist.

Lösung zur Aufgabe 6:

Angenommen, $w \in (U \cap V) \setminus \{0\}$. Dann folgt aus

$$\|w\|^2 = \langle w, w\rangle = 0$$

bereits ein Widerspruch.

Sei $w_n = u_n + v_n$ eine Folge aus $U \oplus V$ mit $u_n \in U$, $v_n \in V$ und $w_n \to w$ für $n \to \infty$. Wir haben hier zwei Möglichkeiten.

Zuerst, sei P die orthogonale Projektion auf U, die wegen der Abgeschlossenheit von U existiert. Nach Voraussetzung hat man $V \subset U^\perp$, d.h. $Px = 0$ für alle $x \in V$ (siehe Korollar 10.5). Die Stetigkeit von P liefert

$$u_n = P(u_n + v_n) = Pw_n \to Pw.$$

Da U abgeschlossen ist, hat man $Pw \in U$. Wir bekommen auch

$$V \ni v_n = w_n - u_n \to w - Pw \in V$$

wegen der Abgeschlossenheit von V. Damit gilt

$$w = \underbrace{Pw}_{\in U} + \underbrace{w - Pw}_{\in V}.$$

Alternativ, w_n ist konvergent, also eine Cauchy-Folge. Nach Pythagoras

$$\|w_n - w_m\|^2 = \|u_n + v_n - u_m - v_m\|^2 = \|u_n - u_m + v_n - v_m\|^2 = \|u_n - u_m\|^2 + \|v_n - v_m\|^2$$

sind sowohl $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cauchy-Folgen. Da U und V abgeschlossen sind, liegen auch die Limes $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ und $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ in U bzw. V. Wir haben also

$$w = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = u + v.$$

Beachte: falls eine Summe konvergiert, dann folgt daraus keineswegs, dass auch die Summanden konvergieren. Betrachte z.B. $0 = n + (-n)$.

Aufgabe 7

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, auf dem der Gaußsche Integralsatz gilt. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \operatorname{div} F & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$*$}$$

für $F = (F_1, \dots, F_n) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \dots, n$.

a) Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ von $(*)$ auch der schwachen Formulierung $(**)$ genügt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = -\int_\Omega F \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (**)$$

b) Zeigen Sie, dass $(**)$ genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt und dass dazu $F_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$ ausreicht.

Lösung zur Aufgabe 7:

a) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig aber fest. Wir multiplizieren die Gleichung mit φ und integrieren über Ω

$$-\int_\Omega \Delta u \, \varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \operatorname{div} F \, dx.$$

Die Greensche Formel zusammen mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ liefert

$$\int_\Omega \Delta u \, \varphi \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi \, dS}_{=0}.$$

Der Integralsatz von Gauß zusammen mit der Produktregel liefert

$$0 = \int_{\partial\Omega} (\varphi F) \cdot \nu \, dS = \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi F) \, dx = \int_\Omega \varphi \operatorname{div} F \, dx + \int_\Omega F \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Damit hat man

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = -\int_\Omega \Delta u \, \varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \operatorname{div} F \, dx = \int_\Omega F \cdot \nabla \varphi \, dx$$

und u erfüllt die schwache Formulierung $(*)$.

b) Wir definieren das Funktional $l \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$l(v) := -\int_\Omega F \cdot \nabla v \, dx.$$

Dieses Funktional ist nach Konstruktion linear und nach Cauchy-Schwarz-Ungleichung beschränkt

$$|l(v)| = \left| \int_\Omega F \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \int_\Omega |F| |\nabla v| \, dx \leq \| |F| \|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

für $F_i \in L^2(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$, insbesondere auch für $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq n$.

Wir sollen also zeigen, dass es genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ gibt mit

$$\langle u, \varphi \rangle = l(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

wobei

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Nach dem Satz von Riesz gibt es genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\langle u, \varphi \rangle = l(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Dieses u ist auch eine Lösung von $(**)$. Angenommen, es gäbe eine weitere Lösung $w \in H_0^1(\Omega)$. Dann hat man

$$\langle u - w, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ ist, findet man eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|\varphi_n - (u - w)\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$ für $n \to \infty$. Die Stetigkeit des Skalarprodukts liefert schließlich:

$$\|u - w\|^2 = \langle u - w, u - w \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u - w, \varphi_n \rangle = 0.$$

Aufgabe 8

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ seien lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist A stetig und B kompakt, so sind $A \circ B$ und $B \circ A$ kompakt.

b) Falls $\mathrm{Id} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ kompakt ist, dann ist $\dim \mathcal{H} < \infty$.

   Hinweis: Falls $\dim \mathcal{H} = \infty$ ist, betrachten Sie eine Folge mit paarweise orthogonalen Elementen, deren Existenz zu begründen ist.

Lösung zur Aufgabe 8:

a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathcal{H}$, $\|x_n\| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem $C > 0$. Wir zeigen zuerst, dass $(A(B(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge besitzt. Nach Definition gibt es eine konvergente Teilfolge $(B(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. Da stetige Operatoren konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbilden, ist auch $(A(B(x_{n_k})))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. Wir betrachten nun $(B(A(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$. Aus

$$\|Ax_n\| \le \|A\|\|x_n\| \le C\|A\|$$

folgt, dass $(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt ist. Die Kompaktheit von B liefert die Existenz einer konvergenten Teilfolge.

b) Angenommen, Id wäre kompakt mit $\dim \mathcal{H} = \infty$. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. So ein System kann man aus einer beliebigen Folge von linear unabhängigen Vektoren (existiert wegen $\dim \mathcal{H} = \infty$) mit Hilfe der Gramm-Schmidt-Orthogonalisierung bekommen. Jede Teilfolge davon ist wieder ein Orthonormalsystem, es reicht also zu zeigen, dass $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent ist. Nach dem Satz von Pythagoras

$$\|v_n - v_m\| = \sqrt{\|v_n\|^2 + \|-v_m\|^2} = \sqrt{2}, \quad \forall (n \neq m) \in \mathbb{N}.$$

ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge, insbesondere nicht konvergent.