

Differentialgleichungen und Hilberträume – Sommersemester 2014 Handout zum Integralbegriff

Quelle: W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1987, Chapter 1–3.

Es sei X eine Grundmenge, z.B. $X = \mathbb{R}^n$, und $\mathcal{P}(X)$ = Menge aller Teilmengen von X .

Definition L.1 (σ -Algebra) Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ -Algebra, falls

(i) $X \in \mathcal{M}$

(ii) $A \in \mathcal{M} \implies X \setminus A \in \mathcal{M}$

(iii) $A_i \in \mathcal{M} \quad \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

Definition L.2 (positives Maß) \mathcal{M} sei eine σ -Algebra. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ heißt positives Maß, falls (mindestens) eine Menge $A \in \mathcal{M}$ existiert mit $\mu(A) < \infty$ und falls gilt

$$A_i \in \mathcal{M} \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \implies \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Im folgenden sei X eine Grundmenge, \mathcal{M} eine σ -Algebra über X und μ ein Maß auf \mathcal{M} . Für $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ sei $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$, $f = f^+ - f^-$.

Definition L.3 (messbare Funktionen)

(i) Eine Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, falls $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{L}(X)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Eine Funktion $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Elementarfunktion, falls s nur endlich viele Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ besitzt. Es gilt

$$s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}, \quad A_i = s^{-1}(\alpha_i).$$

Definition L.4 (Integral positiver Funktionen)

(i) Es sei $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$ eine messbare Elementarfunktion. Dann heißt

$$\int_X s \, dx := \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i)$$

Integral von s über der Menge X .

(ii) Es sei $f : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann heißt

$$\int_X f \, d\mu := \sup_{s \in \mathcal{S}} \int_X s \, d\mu, \quad \mathcal{S} = \{s : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbare Elementarfunktion}, 0 \leq s \leq f\}$$

Integral von f über der Menge X .

Definition L.5 (Integral komplexwertiger Funktionen) Es sei $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ oder \mathbb{C} .

$$L^1(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar} : \int_X |f| \, d\mu < \infty\}.$$

Für $f \in L^1(X)$ sei $f_1 = \Re f, f_2 = \Im f$. Dann heißt

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f_1^+ \, d\mu - \int_X f_1^- \, d\mu + i \left(\int_X f_2^+ \, d\mu - \int_X f_2^- \, d\mu \right)$$

Integral von f über der Menge X .

Definition L.6 ($f = g$ f.ü.) Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ messbar, dann heißt $f = g$ fast überall, falls es eine Nullmenge N gibt mit $f(x) = g(x) \forall x \in X \setminus N$. **Fast-überall Gleichheit** ist eine Äquivalenzrelation.

Definition L.7 (Essentielles Supremum) Für eine messbare Funktion $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist

$$\text{ess sup } F := \inf \{s \in \overline{\mathbb{R}} : F(x) \leq s \text{ f. ü. in } X\}.$$

Definition L.8 (Der Raum $L^p(X)$)

(a) Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$L^p(X) = \{u : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ bzw. } \mathbb{C} \text{ messbar: } \int_X |u|^p \, d\mu < \infty\}.$$

(b) Für $p = \infty$ sei

$$L^\infty(X) = \{u : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ bzw. } \mathbb{C} \text{ messbar: } \text{ess sup}_X |u| < \infty\}.$$

Definition L.9 (Norm auf $L^p(X)$) Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\|u\|_p := \left(\int_X |u|^p d\mu \right)^{1/p}$$

und

$$\|u\|_\infty := \text{ess sup}_X |u|.$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ ist ein Banach-Raum. Genauer: die Äquivalenzklassen in $L^p(X)$ bezüglich der f.ü.-Relation bilden einen Banach-Raum. $L^2(X)$ ist ein Hilbertraum mit $\langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu$.

Satz L.10 (Minkowski und Hölder Ungleichung)

(i) $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$ für alle $u, v \in L^p(X)$.

(ii) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\int_X |uv| d\mu \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

für alle $u \in L^p(X)$ und alle $v \in L^q(X)$.

Satz L.11 Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $u \in L^p(X)$. Ist $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $L^p(X)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_p = 0$, dann existiert eine Teilfolge $(u_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} u_{k_l}(x) = u(x) \text{ für fast alle } x \in X.$$

Satz L.12 (Monotone Konvergenz) Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf X mit

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots$$

Dann existiert $u(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ für fast alle $x \in X$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X u_k d\mu = \int_X u d\mu.$$

Satz L.13 (Dominierte Konvergenz) Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf X . Falls eine Funktion $w \in L^1(X)$ existiert mit $|u_k(x)| \leq w(x)$ für fast alle $x \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}$ und falls $u(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ fast überall auf X existiert, dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X u_k d\mu = \int_X u d\mu.$$

Satz L.14 (Lemma von Fatou) Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf X mit $u_k(x) \geq 0$ fast überall auf X . Dann gilt

$$\int_X \liminf_{k \in \mathbb{N}} u_k d\mu \leq \liminf_{k \in \mathbb{N}} \int_X u_k d\mu.$$

Nun noch einige Bemerkungen zur Konstruktion des Lebesgueschen Masses und der Lebesgueschen σ -Algebra im \mathbb{R}^n . Es sei $I = I^1 \times \dots \times I^n = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ ein offenes Intervall des \mathbb{R}^n . Dann sei der Inhalt von I gegeben durch $|I| = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$. Dabei kann jedes einzelne Komponentenintervall I^i auch abgeschlossen oder halb-offen sein.

Definition L.15 (äußeres Maß im \mathbb{R}^n) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Dann heißt

$$\lambda(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ und } I_i \text{ beschränktes Intervall } \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

äußeres Maß der Menge A .

Bemerkung: λ ist kein positives Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Definition L.16 (Lebesguesche σ -Algebra; Carathéodory-Kriterium) $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue-messbar (kurz: $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$) falls gilt

$$\lambda(E) = \lambda(A \cap E) + \lambda(A^c \cap E) \quad \forall E \subset \mathbb{R}^n.$$

Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, dann sei $\mathcal{L}(X) = \{A \subset X : A \text{ ist Lebesgue-messbar}\}$.

Satz L.17 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist eine σ -Algebra und das äußere Maß λ ist auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ein positives, vollständiges, bewegungsinvariantes Maß, welches für Jordan-messbare Mengen mit dem Jordan-Maß übereinstimmt.