Differentialgleichungen und Hilberträume
Sommersemester 2014

Nachklausur

1. Teil: Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie ein nichtkonstantes erstes Integral für das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x} = -x^2 + 2y + 1,$$
$$\dot{y} = x^2 + 2xy.$$

Lösung zur Aufgabe 1:

Da es sich hier um ein zweidimensionales System handelt, verfolgen wir den üblichen Ansatz, eine von der Nullfunktion verschiedene reellwertige C^1-Funktion λ derart zu finden, dass die Integrabilitätsbedingung $-(\lambda h)_y = (\lambda g)_x$ mit $g(x,y) = -x^2 + 2y + 1$ und $h(x,y) = x^2 + 2xy$ erfüllt ist, um anschließend ein erstes Integral H aus der Forderung

$$H'(x,y) = \nabla H(x,y)^T = \lambda(x,y)(-h(x,y), g(x,y))$$

zu ermitteln. Für ein solches λ gilt

$$-\frac{\partial(\lambda h)}{\partial y}(x,y) = -\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}(x,y)(x^2 + 2xy) + 2x\lambda(x,y)\right) = -\frac{\partial \lambda}{\partial y}(x,y)(x^2 + 2xy) - 2x\lambda(x,y)$$

sowie

$$\frac{\partial(\lambda g)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \lambda}{\partial x}(x,y)(-x^2 + 2y + 1) - 2x\lambda(x,y).$$

Die Integrabilitätsbedingung ist hier also zu

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial y}(x,y)(x^2 + 2xy) \overset{!}{=} \frac{\partial \lambda}{\partial x}(x,y)(-x^2 + 2y + 1), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

äquivalent. Hieraus ersehen wir, dass wir mit der Wahl $\lambda \equiv 1$ die Integrabilitätsbedingung erfüllen können. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}(-x^2 y + y^2 + y) = g(x,y) = \lambda(x,y) g(x,y)$$

machen wir nun den Ansatz $H(x,y) = -x^2 y + y^2 + y + c(x)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion c. Die Forderung $\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda h = -h$ führt dann zu

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = -2xy + c'(x) \overset{!}{=} -x^2 - 2xy$$

oder äquivalent

$$c'(x) = -x^2.$$

Mit der Wahl $c(x) = -\frac{x^3}{3}$ erhalten wir sodann

$$H(x,y) = -\frac{x^3}{3} - x^2 y + y^2 + y$$

als ein nichtkonstantes erstes Integral zu dem gegebenen Differentialgleichungssystem.

Aufgabe 2

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - 3x - y, \\ \dot{y} &= -2x - 4y + z^2, \\ \dot{z} &= 2x + y - z. \end{aligned}$$

Verifizieren Sie, dass $(0,0,0)$ ein Equilibrium ist und untersuchen Sie $(0,0,0)$ im Hinblick auf seine Stabilitätseigenschaften.

Lösung zur Aufgabe 2:

Wir setzen

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 - 3x - y \\ -2x - 4y + z^2 \\ 2x + y - z \end{pmatrix}$$

für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $(0,0,0)$ ist als Equilibrium erkannt. Ferner gilt

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-3 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2z \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom χ der Matrix $f'(0,0,0)$ lautet (Regel von Sarrus)

$$\chi = -(\lambda+1)\left[(\lambda+3)(\lambda+4) - 2\right] = -(\lambda+1)(\lambda^2 + 7\lambda + 10) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+5).$$

Folglich haben alle Eigenwerte von $f'(0,0,0)$ einen negativen Realteil. Mithin ist $(0,0,0)$ asymptotisch stabil.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Stabilität der trivialen Lösung des Systems

$$\dot{x} = -x^3 - xy - x,$$
$$\dot{y} = x^2 + 2x - y$$

mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion.
Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $V(x,y) = x^{2\alpha} + y^{2\beta}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Lösung zur Aufgabe 3:

Für $V(x,y) = x^{2\alpha} + y^{2\beta}$ hat man $V(0,0) = 0$ sowie $V(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) &= 2\alpha x^{2\alpha-1}\dot{x} + 2\beta y^{2\beta-1}\dot{y} = 2\alpha x^{2\alpha-1}(-x^3 - xy - x) + 2\beta y^{2\beta-1}(x^2 + 2x - y) \\ &= -2\alpha x^{2\alpha+2} - 2\alpha x^{2\alpha}y - 2\alpha x^{2\alpha} + 2\beta y^{2\beta-1}x^2 + 4\beta y^{2\beta-1}x - 2\beta y^{2\beta}.\end{aligned}$$

Wir haben also drei gemischte Terme. Wir wollen α, β so wählen, dass sich zwei davon gegenseitig aufheben. Wegen $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ können wir mit dem vorletzten Term nichts machen, also wählen wir $2\beta - 1 = 1$, $2\alpha = 2$, d.h. $\alpha = \beta = 1$ und bekommen

$$\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = -2x^4 - 2x^2y - 2x^2 + 2yx^2 + 4yx - 2y^2 = -2x^4 - 2(x-y)^2 \leq 0.$$

Aus $-2x^4 - 2(x-y)^2 = 0$ folgt $x = 0 = y$. Dies impliziert, dass $(0,0)$ ein asymptotisch stabiler stationärer Punkt ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-(x^2u'(x))' + 2u(x) = 0, \quad 1 \leq x \leq 2,$$
$$u(1) = u(2) = 0$$

nur die triviale Lösung hat und konstruieren Sie die zugehörige Greensche Funktion.
Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ um ein Fundamentalsystem zu konstruieren.

Lösung zur Aufgabe 4:

Der Ansatz liefert

$$-\alpha(\alpha-1)x^\alpha - 2\alpha x^\alpha + 2x^\alpha \stackrel{!}{=} 0,$$

woraus folgt

$$\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - 2 = (\alpha+2)(\alpha-1) \stackrel{!}{=} 0.$$

Das liefert zwei linear unabhängige Lösungen x^{-2} und x und die allgemeine Lösung ist $C_1x + C_2x^{-2}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen

$$R_1[u] := u(1)$$
$$R_2[u] := u(2).$$

Wir zeigen, dass nur die triviale Lösung $C_1 = C_2 = 0$ das Randwertproblem erfüllt. In der Tat, erfüllt $u = C_1 x + C_2 x^{-2}$ die Randbedingungen $R_1[u] = R_2[u] = 0$, dann ist die Matrix zur Bestimmung von C_1, C_2 invertierbar:

$$\det \begin{pmatrix} R_1[x] & R_1[x^{-2}] \\ R_2[x] & R_2[x^{-2}] \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir konstruieren nun zwei Lösungen φ, ψ mit $R_1[\varphi] = R_2[\psi] = 0$ und $R_2[\varphi] = R_1[\psi] = 1$. Für $\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^{-2}$ bekommt man

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

und für $\psi(x) = \beta_1 x + \beta_2 x^{-2}$ bekommt man

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $W[\varphi, \psi]$:

$$\begin{aligned} W[\varphi, \psi](x) &= \det \begin{pmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \det \begin{pmatrix} 4x - 4x^{-2} & -x + 8x^{-2} \\ 4 + 8x^{-3} & -1 - 16x^{-3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{49} \left(-4x - 64x^{-2} + 4x^{-2} + 64x^{-5} + 4x - 32x^{-2} + 8x^{-2} - 64x^{-5} \right) = -\frac{84}{49} x^{-2} \end{aligned}$$

Insbesondere, haben wir auch $-x^2 W[\varphi, \psi](x) \equiv \text{const}$ vgl. Blatt 7, Aufgabe 3. Die Greensche Funktion hat also die Gestalt

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta) &= \frac{1}{-\eta^2 W(\eta)} \begin{cases} \varphi(\xi)\psi(\eta), & \text{für } 1 \leq \xi \leq \eta \leq 2 \\ \varphi(\eta)\psi(\xi), & \text{für } 1 \leq \eta \leq \xi \leq 2 \end{cases} \\ &= \frac{49}{84} \frac{4}{49} \begin{cases} (\xi - \xi^{-2})(-\eta + 8\eta^{-2}), & \text{für } 1 \leq \xi \leq \eta \leq 2 \\ (\eta - \eta^{-2})(-\xi + 8\xi^{-2}), & \text{für } 1 \leq \eta \leq \xi \leq 2 \end{cases} \\ &= \frac{1}{21} \begin{cases} (\xi - \xi^{-2})(-\eta + 8\eta^{-2}), & \text{für } 1 \leq \xi \leq \eta \leq 2 \\ (\eta - \eta^{-2})(-\xi + 8\xi^{-2}), & \text{für } 1 \leq \eta \leq \xi \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Teil: Hilberträume

Aufgabe 5

Sei V der Vektorraum der finiten reellwertigen Folgen, d.h.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \Leftrightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}\colon x_n = 0, \forall n \geq N_0.$$

Für $p \in (1,\infty)$ ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit der Norm $\|x\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$. Es sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T: \begin{cases} (V, \|\cdot\|) & \to & (V, \|\cdot\|), \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Ist die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, dann ist T stetig. Bestimmen Sie in diesem Fall $\|T\|$.

b) Ist T stetig, so ist $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Lösung zur Aufgabe 5:

a) Sei $x \in V$, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{N_0} |x_n|^p < \infty$ mit einem von x abhängigen $N_0 \in \mathbb{N}$. Aus

$$\|T_\alpha x\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^p = \sum_{n=1}^{N_0} |\alpha_n x_n|^p \leq \|\alpha\|_{\ell^\infty}^p \sum_{n=1}^{N_0} |x_n|^p \leq \|\alpha\|_{\ell^\infty}^p \|x\|_{\ell^p}^p$$

bekommt man $\|T_\alpha\| \leq \|\alpha\|_{\ell^\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$, d.h. die Beschränktheit von T_α.

Sei $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine (möglicherweise konstante) Folge mit $\lim_{k\to\infty} |\alpha_{n_k}| = \|\alpha\|_{\ell^\infty}$. Aus

$$\|T_\alpha\| \geq \lim_{k\to\infty} \frac{\|T_\alpha e_{n_k}\|_{\ell^p}}{\|e_{n_k}\|_{\ell^p}} = \lim_{k\to\infty} |\alpha_{n_k}| = \|\alpha\|_{\ell^\infty}.$$

bekommt man $\|T_\alpha\| = \|\alpha\|_{\ell^\infty}$.

b) Wir zeigen die Behauptung indirekt. Sei $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} |\alpha_{n_k}| = +\infty$. Die Abschätzung

$$\|T_\alpha\| \geq \lim_{k\to\infty} \frac{\|T_\alpha e_{n_k}\|_{\ell^p}}{\|e_{n_k}\|_{\ell^p}} = \lim_{k\to\infty} |\alpha_{n_k}| = +\infty.$$

liefert nun einen Widerspruch zur Beschränktheit von T_α.

Aufgabe 6

Finden Sie die beste Approximation von $\sin x$ in dem von 1 und x aufgespannten Unterraum des reellen Hilbertraumes $L^2([0, \frac{\pi}{2}])$.

Lösung zur Aufgabe 6:

Wir definieren $v_1 := 1$, $v_2 := x$. Da $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0$, setzen wir $w_1 := v_1$ und suchen w_2 in der Form $w_2 := v_1 + \alpha v_2$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$0 \stackrel{!}{=} \langle w_1, w_2\rangle = \langle v_1, v_1\rangle + \alpha\langle v_1, v_2\rangle.$$

Dies liefert

$$\alpha = -\langle v_1, v_1\rangle/\langle v_1, v_2\rangle = \frac{-\int_0^{\pi/2} 1dx}{\int_0^{\pi/2} xdx} = \frac{-\pi/2}{\pi^2/8} = -4/\pi.$$

Damit hat man $\langle w_1, w_2\rangle = \langle v_1, v_1 - \frac{4}{\pi}v_2\rangle = 0$ und $\mathrm{LH}\{v_1, v_2\} = \mathrm{LH}\{w_1, w_2\}$. Anschließend normieren wir w_1 und w_2 durch $u_1 := w_1/\|w_1\|$ und $u_2 := w_2/\|w_2\|$. Laut Satz 10.7 hat die beste Approximation u^* von $u := \sin x$ in $\mathrm{LH}\{w_1, w_2\} = \mathrm{LH}\{u_1, u_2\}$ die Darstellung

$$u^* = \langle u, u_1\rangle u_1 + \langle u, u_2\rangle u_2 = \frac{\langle u, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1 + \frac{\langle u, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}w_2.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle u, w_1\rangle &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1\\
\langle u, v_2\rangle &= \int_0^{\pi/2} xd(-\cos x) = -x\cos x|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1\\
\langle u, w_2\rangle &= \langle u, v_1\rangle - \tfrac{4}{\pi}\langle u, v_2\rangle = 1 - 4/\pi\\
\langle w_1, w_1\rangle &= \int_0^{\pi/2} 1dx = \pi/2\\
\langle w_2, w_2\rangle &= \int_0^{\pi/2} (1 - \tfrac{4}{\pi}x)^2 dx = \frac{4^2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} (x - \tfrac{\pi}{4})^2 dx = \frac{4^2}{\pi^2}\cdot \tfrac{x^3}{3}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

und bekommen

$$u^* = \frac{2}{\pi} + \frac{1 - 4/\pi}{\pi/6}(1 - \tfrac{4}{\pi}x) = \frac{8 - 24/\pi}{\pi} - \frac{24(1 - 4/\pi)}{\pi^2}x.$$

Aufgabe 7

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen sowie $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq 0$. Zeigen Sie, dass die einzige schwache Lösung in $H_0^1(\Omega)$ des Randwertproblems

$$-\Delta u + c(x)u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

die Nulllösung ist.

Lösung zur Aufgabe 7:

Angenommen, es gäbe eine nichttriviale schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. Aus der schwachen Formulierung bekommt man

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + c(x)u\varphi\, dx = 0, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nach Definition ist $H_0^1(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, $\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$ (insbesondere $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ und $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$). Das heißt, es gibt eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|\varphi_n - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0$. Wir haben nun

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_n + c(x)u\varphi_n \, dx \to \int_\Omega |\nabla u|^2 + c(x)u^2 \, dx,$$

denn

$$\left| \int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla \varphi_n - \nabla u) \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\varphi_n - u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_n - u\|_{H^1(\Omega)}$$

und

$$\left| \int_\Omega c(x)u(\varphi_n - u) \, dx \right| \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_n - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_n - u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Mithilfe von $c \geq 0$ bekommen wir

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_n + c(x)u\varphi_n \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 + c(x)u^2 \, dx \geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

und aus der Poincaré-Ungleichung

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_p \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

mit einem $C_p > 0$ folgt schließlich $u = 0$ in $H_0^1(\Omega)$.

Aufgabe 8

Sei $\ell_2 := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \|x\|_{\ell_2} := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2\right)^{1/2} < \infty\}$ der übliche Hilbertraum der quadratsummierbaren Folgen und sei

$$M := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) $M \subset \ell_2$.

b) Falls $x \in M$ und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M ist mit

$$x_n^{(k)} \overset{k\to\infty}{\to} x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dann gilt $\|x^{(k)} - x\|_{\ell_2} \to 0$ für $k \to \infty$.

Lösung zur Aufgabe 8:

a) Sei $x \in M$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bekommt man

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} < \infty,$$

d.h. $\|x\|_{\ell_2} < \infty$.

b) Wir wollen zeigen, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|x^{(k)} - x\|_{\ell_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n|^2 < \epsilon$$

für alle $k \geq K$.

Da $x^{(k)}, x \in M$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ (unabhängig von k) mit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Wähle jetzt $K \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$|x_n^{(k)} - x_n|^2 \leq \frac{\epsilon}{2N}$$

für alle $1 \leq n \leq N$ und $k \geq K$. Wir haben nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n|^2 = \sum_{n=1}^{N} |x_n^{(k)} - x_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n|^2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$