Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 7

Abgabe: 05.06.2015 - 10Uhr

Aufgabe 27

Sei $c > 0$. Beweisen Sie, dass das inhomogen Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = x^2 & ((x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)) \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ besitzt. Berechnen Sie anschließend die Lösung, indem Sie zunächst eine zeitunabhängige Lösung der partiellen Differentialgleichung berechnen.

Lösung: Die Eindeutigkeit der Lösung haben wir bereits in der Übung gezeigt. Es bleibt die Berechnung der Lösung. Wie im Hinweis berechnen wir zunächst eine zeitunabhängige Lösung der Differentialgleichung. Setze dazu $u(x,t) := z(x)$ für ein $z \in C^2$. Die entsprechende Gleichung wird dann zu

$$-c^2 z''(x) = x^2,$$

welche zum Beispiel durch die Funktion z gegeben durch $z(x) = -\frac{1}{12c^2}x^4$ gelöst wird. Um nun eine Lösung des Randwertproblems zu erhalten müssen die Randbedingungen noch angepasst werden. Die allgmeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist gegeben durch

$$u(x,t) = z(x) + f(x+ct) + g(x-ct),$$

für beliebige Funktionen $f, g \in C^2$. Einsetzen in die Randbedingungen liefert die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12c^2}x^4 + f(x) + g(x) &= 0 \\ cf'(x) - cg'(x) &= 0, \end{aligned}$$

Daraus erhält man $f(x) = g(x) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{24c^2}x^4$. Setzt man das nun zusammen erhält man:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\frac{1}{12c^2}x^4 + \frac{1}{12}(x+ct) + \frac{1}{24c^2}(x+ct)^4 + \frac{1}{12}(x-ct) + \frac{1}{24c^2}(x-ct)^4 \\ &= x + \frac{1}{2}x^2t^2 + \frac{1}{12}c^2t^4. \end{aligned}$$