**Karlsruher Institut für Technologie**
**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

# Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 10

Abgabe: 26.06.2015 - 10Uhr

## Aufgabe 38

Sei $1 \leq p < q \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass die folgenden normierten Räume nicht vollständig sind:

a) $(l^p, \|\cdot\|_q)$

b) $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_p)$

Lösungsvorschlag:
b) Sei $x_0 \in \Omega$ und $R > 0$ so klein, dass $B_R(x_0) \subseteq \Omega$. Definiere $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^q(\Omega)$ durch

$$u_k(x) := \chi_{B_R(x_0)\setminus B_{R/k}(x_0)}(x)\frac{1}{|x-x_0|^{\frac{2n}{p+q}}}.$$

Dann gilt: $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_p)$, denn $\int_{B_R(x_0)} |u_k|^p < \infty$ (siehe Aufgabe 33). Aber angenommen $u_k \to u$, dann konvergiert $u_k$ insbesondere punktweise fast überall gegen $u$ und damit gilt $u(x) = \chi_{B_R(x_0)}|x-x_0|^{-2n/(p+q)}$ für fast alle $x \in \Omega$. Das steht aber im Widerspruch zu $u \in L^q(\Omega)$, denn $\int_\Omega |u|^q\,dx = \infty$ (Aufgabe 33).

## Aufgabe 40

Beweisen Sie folgende Dichtheitsrelationen:

a) $L_0^p(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) :\ \exists K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt}, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K :\ u(x) = 0\} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht.

b) $C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht. Hinweis: Approximieren Sie durch Treppenfunkionen. Diese können als endliche Linearkombination der Form $\sum_{l\in\mathbb{N}} c_l\ \chi_{Q_l}$ geschrieben werden, wobei $c_l \in \mathbb{C}$ und $\chi_{Q_l}$ charakteristische Funktionen von offenen Quadern $Q_l$ sind, welche eine Basis der Borelschen $\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ bilden.

c) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht. Hinweis: Kombinieren Sie b) mit Aufgabe 39.

Lösungsvorschlag:
a) Für $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist für jedes $\varepsilon > 0$ ein $v \in L_0^p(\mathbb{R}^n)$ anzugeben, sodass $\|u-v\|_p < \varepsilon$ gilt. Alternativ kann man auch eine Folge in $L_0^p(\mathbb{R}^n)$ angeben, die gegen $u$ konvergiert. Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, definiere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L_0^p(\mathbb{R}^N)$ durch $u_n := \chi_{B_n(0)}u$, dann gilt: $u_n \to u$ punktweise. Mittels majorisierter Konvergenz gilt dann

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |u_n|^p \overset{|u|^p \text{ ist Majorante}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p.$$

Daher gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_p = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_n(0)} |u|^p = 0.$
b) Zunächst ist für $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ die Funktion $|u|^p$ integrierbar, daher gibt es per Definition zu jedem

$\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $t := \sum_{l\in\mathbb{N}} |c_l|^p \chi_{Q_l}$ mit $c_l = 0$ für alle $l > N \in \mathbb{N}$ und Quadern $Q_l$, sodass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} t \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es ist also hinreichend zu eigen, dass charakteristische Funktionen von Quadern $\chi_{Q_l}$ beliebig gut durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger $f_l \in C_0$ approximiert werden können. Genauer ist zu zeigen, dass zu jedem $\chi_{Q_l}$ ein $f_l \in C_0$ existiert, derart, dass $\|\chi_{Q_l} - f_l\|_p < \frac{\varepsilon}{2 \max c_l \cdot N}$ für alle $l \in \mathbb{N}$, dann folgt nämlich:

$$\|u - \sum_{l=1}^{N} c_l f_l\|_p \leq \|u - t^{1/p}\| + \|t^{1/p} - \sum_{l=1}^{N} c_l f_l\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{l=1}^{N} |c_l| \|\chi_{Q_l} - f_l\|_p < \varepsilon.$$

Sei also $Q_l$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$. Nach Transformationssatz reicht es o.B.d.A den Einheitswürfel zu betrachten, da ich jeden Quader mit entsprechender Streckung und Verschiebung auf die Gestalt bringen kann. Definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)$ mit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \, g(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq k^{-1} \\ 1 & k^{-1} \leq x \leq 1 - k^{-1} \\ -k(x-1) & 1 - k^{-1} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - \chi_[0,1](x)|^p \, dx = 2 \int_0^{\frac{1}{k}} |1 - kx|^p \, dx = \frac{2}{k(p+1)} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Unter Verwendung von $\chi_{[0,1]^n}(x) = \prod_{k=1}^{n} \chi_{[0,1]}(x_k)$ und des Satzes von Fubini, erhält man die Existenz eines $f_l$ mit den gewünschten Eigenschaften.

c) Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, wähle gemäß A40b) ein $v \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u - v\|_p < \varepsilon/2$. Gemäß A39 gilt: $A_\eta v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wähle $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $\operatorname{supp} v + B_R(0) \cap \operatorname{supp} v \subseteq M$. Wähle dann $\eta$ so klein, dass $\|A_\eta v - v\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{vol}(M)^{1/p}}$. Dann folgt wie in Aufgabe 33, dass $\|A_\eta v - v\|_p \leq \mathrm{vol}(M)^{1/p} \|A_\eta v - v\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Zusammen ergibt sich also:

$$\|u - A_\eta v\|_p \leq \|u - v\|_p + \|v - A_\eta v\|_p < \varepsilon.$$