Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Differentialgleichungen und Hilberträume - Übungsblatt 9

Abgabe: 19.06.2015 - 10Uhr

Aufgabe 33

a) Sei für $1 \leq p \leq \infty$ der Folgenraum l_p wie in der Vorlesung definiert. Beweisen Sie

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p \qquad (u \in l^p)$$

für alle $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und damit $l_p \subseteq l_q$. Zeigen Sie ferner $l_p \subsetneq l_q$ für $p < q$.
Kann man die Definition der normierten Räume $(l_p, \|\cdot\|)$ analog auf den Fall $0 < p < 1$ erweitern?

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Beweisen Sie, dass $L^q(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p < q \leq \infty$ gilt und dass es ein $C > 0$ gibt, sodass $\|u\|_p \leq C\|u\|_q$ für alle $u \in L^q(\Omega)$ gilt. Gilt dies auch für $\Omega = \mathbb{R}$?

zu Teil a) Hier wurde der Fall $q = \infty$ unterschlagen. Für $p = q$ ist die Aussage trivial, für $p < \infty$ gilt die folgende Implikation: $u \in l^p$, daraus folgt: u ist Nullfolge. Das heißt, für $\varepsilon > 0$ vorgegeben gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $|u_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Wähle zum Beispiel $\varepsilon = |u_{k_0}|$ (mit $u_k = 0$ für alle $k = 1, .., k_0 - 1$), dann gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = \max\{|u_n|,\ n = 1, .., N\}.$$

Das heißt $u \in l^\infty$ und es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ abhängig von u mit $\|u\|_\infty = |u_{n_0}|$. Daraus erhält man die Abschätzung

$$\|u\|_\infty = |u_{n_0}| = (|u_{n_0}|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^p \right)^{1/p} = \|u\|_p.$$

zu Teil b) Wie in der Übung befürchtet, stimmte der Exponent lediglich um einen Summanden 1 nicht: Sei $p < q < \infty$ Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in \Omega$ beliebig (Tatsächlich kann man auf Offenheit von Ω verzichten und ist hier hinreichend, dass Ω messbar ist und einen inneren Punkt hat.) Für $R > 0$ so klein, dass $B_R(x_0) \subseteq \Omega$ definiere $u : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \chi_{B_R(x_0)}(x) \frac{1}{\|x - x_0\|^{\frac{2n}{p+q}}}$ Dann ist $u \in L^p(\Omega) \setminus L^q(\Omega)$, denn

$$\int_\Omega |u|^\alpha(x)\, dx = \int_\Omega \chi_{B_R(x_0)}(x) \frac{1}{\|x - x_0\|^{\frac{2\alpha}{p+q}n}} = vol(\mathbb{S}^n) \int_0^R r^{-\frac{2\alpha}{p+q}n} r^{n-1}\, dr.$$

Nun gilt:

$$-\frac{2\alpha}{p+q}n + n - 1 \begin{cases} < -1 & \text{für } \alpha = q \\ > -1 & \text{für } \alpha = p. \end{cases}$$

Im ersten Fall ist das Integral unendlich und im zweiten endlich.