Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Peter Rupp M.Sc

SoSe 2015
06.08.2015

Klausur zur Vorlesung
Differentialgleichungen und Hilberträume

Name:

Matrikelnummer:

Hinweise:

a) Die Klausur enthält 8 Aufgaben. Bitte prüfen Sie, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

b) Bitte ergänzen Sie zunächst Name und Matrikelnummer im oberen Teil des Deckblattes. Falls Sie zusätzliche Blätter abgeben wollen, schreiben Sie bitte auf jedes solche Ihren Namen.

c) Zur Bearbeitung der Klausur haben Sie 120 Minuten Zeit.

d) Pro Aufgabe können maximal 10 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur genügen 30 Punkte.

Wird vom Korrektor ausgefüllt:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$

Note:

Aufgabe 1: Betrachten das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} &= yx^2e^{-y} + 4y\sin(y) \\ \dot{y} &= 2xye^{-y} \end{cases}, \quad x, y > 0.$$

a) Weisen Sie nach, dass die rechte Seite die Integrabilitätsbedingung für die Existenz eines ersten Integrals erfüllt.
Hinweis: Wählen Sie λ nur abhängig von y.

b) Berechnen Sie ein erstes Integral für das System.

Aufgabe 2: Betrachten Sie das mathematische Pendel mit Reibung, welches modelliert wird durch die Gleichung

$$y'' + \alpha y' + \beta \sin(y) = 0$$

mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$. Transformieren Sie die Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung, bestimmen Sie alle Gleichgewichtslagen und untersuchen Sie diese auf (asymptotische) Stabilität.

Aufgabe 3: Sei $r \in C[0,1]$ beliebig. Beweisen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = r & \text{auf } [0,1], \\ y(0) = 1, & y(1) + y'(1) = 0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung in $C^2[0,1]$ besitzt. Zeigen Sie weiter, dass die Funktion

$$G:\ [0,1]^2 \to \mathbb{R},\ G(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{-3x} - e^{-x}\right) e^{3t} & 0 \le x \le t \le 1 \\ \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{3t}\right) e^{-x} & 0 \le t \le x \le 1 \end{cases}$$

die Greensche Funktion zu $(y'' + 4y' + 3y,\ y(0),\ y(1) + y'(1))$ ist.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ des folgenden Cauchy-Problems für die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0 & (x \in \mathbb{R},\ 0 \leq t < \infty) \\ u(x,0) = e^{-x},\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}.$$

Aufgabe 5: Sei

$$H := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \ f \text{ ist Lebesgue-messbar und } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{1+|x|^2}\, dx < \infty \right\}.$$

Wie üblich werden Funktionen miteinander identifiziert, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.

a) Beweisen Sie, dass $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)\overline{g(x)}}{1+|x|^2}\, dx \qquad (f, g \in H)$$

ein Hilbertraum ist.
Hinweis: Für $f \in H$ ist $\frac{f}{\sqrt{1+|\cdot|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \neq (0, 0, \cdots, 0)$. Beweisen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definiert durch $f_k(x) := f(x - ky)$, in H gegen 0 konvergiert. Konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gegen 0?

Aufgabe 6: Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 < q \leq p < \infty$. Ferner sei

$$T : l^p \to l^q,\ (Tx)_k := \frac{x_k}{k^{\frac{1}{q}}}.$$

a) Beweisen Sie, dass T stetig ist.

b) Seien nun $p = q = 2$. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenelemente von T.

c) Seien $p = q = 2$ und der Hilbertraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ definiert durch

$$H := \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2 :\ x_k = 0 \text{ für alle } k \geq 4\},$$

und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ bezeichne das kanonische innere Produkt auf l^2. Beweisen Sie, dass

$$T|_H : H \to H$$

kompakt ist.

Aufgabe 7: Beweisen Sie, dass der Raum

$$V := \left\{ (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2 : \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{v_k}{k} = 0 \right\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von l^2 ist. Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$ definiert durch $u_k := k^{-3}$. Entscheiden Sie, ob $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beste Approximation in V hat und geben Sie diese gegebenenfalls an.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen: $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-2} = \pi^2/6$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-4} = \pi^4/90$

Aufgabe 8: Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H. Die Abbildung $F : H \to H$ sei definiert durch

$$F(u) := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle u, \phi_k\rangle}\, \phi_k.$$

a) Beweisen Sie, dass F stetig ist. (Vorsicht: F ist nicht linear.)

b) Sei $U := \overline{\mathrm{LH}[\phi_k : \ k \in \mathbb{N}]}$ der Abschluss des durch $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aufgespannten Unterraums und $P_U : H \to H$ sei die orthogonale Projektion auf U. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$F^2 = P_U.$$