Übungsblatt 1

8. Mai 2015

Vorbemerkung. *Dies ist keine Musterlösung. Es werden lediglich die erwartete Herangehensweise an die Aufgaben und beobachtete Schwierigkeiten diskutiert.*

Aufgabe 1

In Aufgabe 1 möchte ich darlegen, was ich unter einem vollständigen Beweis der gegebenen Aussage verstehe. Zu diesem Zwecke werden wir eine etwas stärkere Aussage als die zu beweisende beweisen.

Voraussetzung. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ kein Eigenwert von A und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ein Polynom k-ten Grades gegeben durch*

$$p(t) \ = \ \sum_{j=0}^{k} a_j t^j \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit $a_j \in \mathbb{R}^n$ $\forall 0 \leq j \leq k$. Insbesondere ist $a_k \neq 0$.

Proposition. *Es existiert genau ein Polynom $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derart, dass $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto q(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$*

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + p(t)\mathrm{e}^{\lambda t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

genügt. q hat den Grad k.

Beweis. Sei q ein beliebiges Polynom. Def. $m := \max(\{k; \deg(q)\})$ und schreibe

$$q(t) \ = \ \sum_{j=0}^{m} b_j t^j \quad \forall t \in \mathbb{R},$$
$$p(t) \ = \ \sum_{j=0}^{m} a_j t^j \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$ und "fülle"gegebenfalls p "mit Nullen auf". Dann genügt $y(\cdot) := q(\cdot)e^{\lambda\cdot}$ genau dann (1), falls

$$(\lambda - A)q(t) = -\dot{q}(t) + p(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist. λ ist nach Voraussetzung kein Eigenwert, weshalb $(\lambda - A)$ dann vollen Rang hat. Da weiter die Monome $t^0, t^1, \ldots$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, ergibt sich durch zeilenweisen Koeffizientenvergleich, dass die letzte Gleichung genau dann erfüllt ist, wenn

$$b_j = (\lambda - A)^{-1}(a_j - (j+1)b_{j+1}) \qquad \forall 0 \leq j \leq m$$

gilt, wobei wir $b_{m+1} := 0$ setzen. Indem wir sukzessive diese Gleichungen bei "$j = m$"[1] anfangend lösen, wobei dann $b_m = (\lambda - A)^{-1}a_m$ ist, erhalten wir damit ein eindeutiges Polynom q, welches wegen $\lambda \in \mathbb{R}$ tatsächlich Werte in $\mathbb{R}^n$ annimmt und für welches y Gleichung (1) genügt. Des Weiteren erhalten wir aus der letzten Gleichung für den Fall $m > k$

$$\begin{aligned}
b_m &= (\lambda - A)^{-1}a_m = 0, \\
b_j &= (\lambda - A)^{-1}(-(j+1)b_{j+1}) \overset{\text{sukz. Einsetzen}}{=} 0 \quad \forall j > k, \\
b_k &\overset{\text{obere Zeile}}{=} (\lambda - A)^{-1}a_k \neq 0.
\end{aligned}$$

Wegen $m \geq k$ zeigt dies gerade $m = k = \deg(q)$. Dies schließt den Beweis. □

Beachte, dass wir zu keinem Zeitpunkt angenommen haben, dass q einer speziellen Gleichung genügt. Stattdessen haben wir die Aussage für y zu einer äquivalenten Aussage für q umgeformt und gezeigt, dass man q derart wählen kann, dass die äquivalente Aussage erfüllt ist. Nimmt man die Existenz von q an, so kann man aus der gegebenen DGL für y Eigenschaften für q folgern (z.B. Eindeutigkeit), muss jedoch in einem letzten Schritt ein eventuell gefundenes q noch einmal einsetzen, um die "Rückrichtung" zu zeigen (sog. *Probe*). Für Existenz und Eindeutigkeit gab es jeweils 2 Punkte.

Aufgabe 2

Gegeben seien eine homogene lineare Differentialgleichung H und eine inhomogene lineare DGL IH auf $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ (bzw. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$). Wenn in einer Aufgabe gefordert ist, die Lösung zu berechnen, lauten die Sprechweisen:
Proposition. *Ein reelles (bzw. komplexes) Fundamentalsystem von H lautet $\{y_1; y_2; \ldots; y_n\}$ mit $y_1(t) = \ldots$.*
oder
Proposition. *Die reelle (bzw. komplexe) Fundamentalmatrix von H ist $\ldots$.*

[1] N.b.: Wir haben streng genommen von außen keinen Zugriff auf die innere Variable j, da sie innerhalb der Aussage steckt.

bzw.

Proposition. *Der Lösungsraum* $\mathbb{L}_{IH}$ *von* IH *genügt*

$$\mathbb{L}_{IH} = \mathbb{L}_H + y_p,$$

wobei L_H *von* $\{y_1; \ldots; y_n\}$ *aufgespannt wird und eine partikuläre Lösung* y_p *... lautet.*

Es ist essentiell, den Raum, auf dem eine Lösung gesucht wird, festzulegen, da sonst der Begriff der Lösung nicht definiert ist.

Des Weiteren wurde bei dieser Aufgabe vermehrt "$\Rightarrow v_j = ...$" und "$\Rightarrow \lambda_j = ...$" bei der Bestimmung von Eigenvektoren und -werten verwendet, ohne dass diese Variabeln vorher sauber definiert wurden.

Aufgabe 3

Da es zu dieser Aufgabe vermehrt Fragen gab, möchte ich folgende Aussage betrachten:

Proposition. *Gegeben sei folgende Iterationsvorschrift:*

$$x_{n+2}(t) \;=\; A\int_0^t\int_0^s x_n(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s + x_0 t + x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

für $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$. *Konvergieren* $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen* y_1 *bzw.* y_2, *so genügen diese*

$$y_j(t) \;=\; A\int_0^t\int_0^s y_j(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s + x_0 t + x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \{1; 2\}.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass wir die Grenzwertbildung mit beiden Integralen vertauschen dürfen. Dazu halte $t \in \mathbb{R}$ fest und beachte, dass aus der gleichmäßigen Konvergenz von $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y_1

$$f_n(s) := \int_0^s x_{2n-1}(r)\mathrm{d}r \;\to\; \int_0^s y_1(r)\mathrm{d}r =: f(s) \tag{2}$$

gleichmäßig in $s \in [0, t]$, falls $n \to \infty$. Damit konvergiert aber auch

$$\begin{aligned} &A\int_0^t\int_0^s x_{2n-1}(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s + x_0 t + x_0 = A\int_0^t f_n(s)\mathrm{d}s + x_0 t + x_0 \\ &\to\; A\int_0^t f(s)\mathrm{d}s + x_0 t + x_0 = A\int_0^t\int_0^s y_j(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s + x_0 t + x_0, \end{aligned}$$

wenn $n \to \infty$. Da $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere punktweise gegen y_1 konvergiert und sich ein analoges Argument für $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ verwenden lässt, folgt somit die Behauptung. $\square$

Als Korollar lässt sich nun formulieren, dass im Falle, dass $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ unterschiedliche Grenzwerte besäßen, die Picard-Iteration in Aufgabe 3 garnicht konvergierte. Beachte hierbei die gleichmäßige Konvergenz von $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Zu zeigen, dass dies nicht der Fall sein kann, war Teil der Aufgabe.

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe konnte man nur dann unabhängig von Teil a) Punkte für die Teile b) und c) bekommen, wenn man eine von a) unabhängige Begründung liefern konnte. Es genügte bei b) nicht, sich auf die in a) evtll. korrekt bestimmten Eigenwerte zu beziehen. Stattdessen musste man begründen, wie sich die Lösung verhalten müsse. Insbesondere genügt es nicht, anzugeben, dass $e^{-\lambda t}$ für $\lambda > 0$ und $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, sondern man musste diese Terme auch mit der Lösung des AWPs in Verbindung setzen.

Nota bene: Der erste Schritt zur Lösung eines Problems ist die logisch präzise Formulierung desselben.