Theorem 0.1. *Seien $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen und $F:\ U \to \mathbb{K}^m$, $(t, x_1, \cdots, x_n) \mapsto F(t, x_1, \cdots, x_n)$ stetig und stetig partiell differenzierbar in $x_1, \cdots, x_n$. Dann ist F lokal Lipschitz-stetig in $x_1, \cdots, x_n$.*

Beweis. Sei $F:\ U \to \mathbb{K}^m$, $(t, x_1, \cdots, x_n) \mapsto F(t, x_1, \cdots, x_n)$ stetig und stetig partiell differenzierbar in $x_1, \cdots, x_n$. Sei $(t^0, x^0) \in U$ und $Q := I \times [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ eine kompakte Umgebung von (t^0, x^0). Sei ferner $(t^0, y^0) \in Q$ beliebig und $\gamma:\ \ [0,1] \to Q$, $s \mapsto (t^0, sx^0 + (1-s)y^0)$ eine glatte Kurve in Q, welche x^0 und y^0 verbindet. Dann sind die Abbildungen $s \mapsto F(\gamma(s))_j$ stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{ds} F(\gamma(s))_j = ((\partial_{x_1} F)_j(\gamma(s)), \cdots, (\partial_{x_n} F)_j(\gamma(s))_j) \left(x^0 - y^0\right) \qquad j = 1 \cdots m$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es für $j = 1, \cdots, m$ ein $s_j^* \in [0,1]$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} F(t^0, x^0)_j - F(t^0, y^0)_j = F(\gamma(1))_j - F(\gamma(0))_j = \frac{d}{ds} F(\gamma(s_j^*))_j \\ = \left((\partial_{x_1} F)_j(\gamma(s_j^*)), \cdots, (\partial_{x_n} F)_j(\gamma(s_j^*))_j\right) \left(x^0 - y^0\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\|F(t^0, x^0) - F(t^0, y^0)\|_{\mathbb{K}^m} \leq \cdot \max_{j=1 \cdots m} \| \left((\partial_{x_1} F)_j(\gamma(s_j^*)), \cdots, (\partial_{x_n} F)_j(\gamma(s_j^*))_j\right) \|_{\mathbb{K}^n} \cdot \|x^0 - y^0\|_{\mathbb{K}^n}$$

Nun sind nach Voraussetzung die Abbildungen $Q \to \mathbb{K}^m$, $(t, x) \mapsto (\partial_{x_k} F)(t, x)$ mit $k = 1, \cdots, n$ stetig. Da Q kompakt ist, nehmen sie ihr Maximum an. Sei nun $L > 0$ so gewählt, dass $L \geq \max\limits_{k=1,\cdots,n} \max\limits_{(t,x)\in Q} \|\partial_{x_k} F(t, x)\|_{\mathbb{K}^m}$. L ist somit unabhängig vom gewählten y^0. Dann erhält man

$$\|F(t^0, x^0) - F(t^0, y^0)\|_{\mathbb{K}^m} \leq L \cdot \|x^0 - y^0\|_{\mathbb{K}^n} \qquad \forall_{(t^0, y^0) \in Q},$$

daher ist F lokal Lipschitz-stetig. □